әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОК 517.53 Қолжазба құқығында

Еркинбаев Нурлан Махсетович

Бесов кеңістіктеріндегі бөлікті - аналитикалық функциялар үшін шекаралық түйіндесу есептері және олардың қолданбалары

8D05404-Іргелі және қолданбалы математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
ҰҒА академигі, Профессор
Блиев Н.К.

Шетелдік ғылыми кеңесші
профессор
Митюшев В. (Краков, Польша)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ……. 3
1 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ БЕСОВ КЕҢІСТІКТЕРІ МЕН КОШИ ТЕКТЕС ИНТЕГРАЛДАР..... 8
1.1 Коши тектес интегралдың анықтамасы және мысалдар.....…….. 11
2 КӨП БАЙЛАНЫСҚАН АЙМАҚТАРДА РИМАННЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРІН ЖӘНЕ СПЕКТРЛІК ℝ-СЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕРІ..... 14
2.1 Біртекті Риман шекаралық есебінің аналитикалық шешімін табу …….. 17
2.2 Біртекті емес Риман шекаралық есебінің аналитикалық шешімі..... 22
2.3 Спектрлік R-сызықты есеп..... 26
3 ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ КАРЛЕМАН ЫҒЫСУЫ БАР СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР..... 37
3.1 Бесов кеңістіктерінде комплекс түйіндес операторы және Карлеман ығысуы бар шекаралық есептер..... 59
3.2 Сингуляр интегралдық теңдеулердің сәйкес жүйесінің құрылымы..... 64
ҚОРЫТЫНДЫ..... 76
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ ……..…….. 77

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. 1851 жылы аналитикалық функциялар үшін шекаралық түйіндес есептер алғаш рет Б. Риманның жұмыстарында алынған [1]. 1904 жылы Д. Гильберт бұл есепті интегралдық теңдеуге келтіріп, шешімінің бар екенін алғаш рет дәлелдеді [2]. Қазіргі уақытта кейбір әдебиеттерде бұл есептер Риман және Риман - Гильберт есептері деп аталады.

Й. Племель шекаралық түйіндес есебінің шешімін Коши тектес интегралды қолдану арқылы алуға болатынын көрсетті [3]. Ол тек индекстің нөлге тең болғандағы дербес жағдайын қарастырды. Бұл идеяның тиімділігі соншалық, қазіргі уақытқа дейін Коши тектес интеграл шекаралық түйіндес есептерін зерттеу және шешу үшін негізгі құрал болып табылады.

Бұл бағыттың дамуының келесі кезеңі Ю. Сохоцкий, А. Пуанкаре, Г. Бертран, Ф. Нётер және Т. Карлеман есімдерімен байланысты.

Алғаш рет Риманың шекаралық есептерінің жалпы шешімдерін Ф.Д. Гахов берген [4]. Скалярлық жағдайда, жалпы бөлікті тегіс қисықтар үшін, бұл есептерді Н.И. Мусхелишвили зерттеген [5].

Кейінірек Кальдерон мен Зигмундтың [6] еңбектері пайда болды, онда бір комплекс айнымалының аналитикалық функциялар теориясының әдістерімен алынған нәтижелер нақты талдау әдістері арқылы көпөлшемді жағдайларға таратылды.

Шекаралық түйіндес есебінің теориясының әрі қарай дамуы Гёльдер үзіліссіз функциялар кеңістігінде және Лебег кеңістігінде функциялар теориясына негізделеді [3,7,8,9,10].

Қазіргі таңда мұндай шекаралық есептер және оларға байланысты сингуляр интегралдық операторлар дифференциалдық теңдеулердің көп айнымалыға арналған шекаралық есептер теориясында, механиканың әртүрлі бөлімдерінде, сондай-ақ теориялық физикада қолданыстарға ие болды.

Н.К. Блиевтің еңбектерінде [11, 12] Бесов кеңістіктеріндегі Коши тектес интегралдарының қасиеттері зерттелген, сондай-ақ Коши ядросы бар сингуляр интегралдық теңдеулердің Нётер шешімділігі қарастырылған, бұл ретте шекаралық есептер теориясы қолданылмаған. Бізге белгілі болғандай, аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептері Бесов кеңістіктерінде алғаш рет осы диссертациялық жұмыста қарастырылады. Қазіргі уақытқа дейін мұндай және ұқсас шекаралық есептер Гёльдер бойынша үзіліссіз функциялар кеңістіктерінде зерттеліп келген.

Бұл диссертациялық жұмыста біз көп байланысты облыстарда бөлікті аналитикалық функциялар үшін Риманның шекаралық есебінің шешімділік шарттарын үзіліссіз функциялар класына енгізілген Бесов кеңістіктерінде

аламыз. Бесов кеңістіктері тұрғысынан үзіліссіз (Гёльдер шартын қанағаттандырмайтын) тығыздықпен тұйық облыста үзіліссіз жаңа Коши тектес интегралдар класы көрсетіліп, Сохоцкий - Племеля формулаларының орындалатыны дәлелденеді. Бұл нәтижелер осы жұмыстың жаңалығына жатады, себебі жалпы жағдайда, кез келген үзіліссіз тығыздыққа ие Коши тектес интеграл тұйық облыста міндетті түрде үзіліссіз функция болмайтыны белгілі. Сонымен қатар, біз Н.К. Блиевтің [11] еңбегіндегі сингуляр интегралдық оператордың Бесов кеңістіктеріндегі шенелгендігіне қойылған шарттарды әлсіретіп, оның жалпыланған нұсқасын ұсынамыз. Бұл тұрғыда, сингуляр интегралдау операторларының белгілі бір комбинацияларының толық үзіліссіздігіне қатысты жаңа нәтижелер алынады. Осылайша, зерттеуімізде Бесов кеңістіктеріндегі шекаралық есептер теориясын әрі қарай дамытуға ықпал ететін маңызды тұжырымдар мен жалпылаулар жасалды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Комплекс айнымалы аналитикалық функциялар теориясында шекаралық есептер, оның ішінде операторлары комплекс түйіндес шекаралық есептер маңызды құрамдас бөліктердің бірі болып табылады. Мұндай есептер елеулі қолданыстарға ие, мысалы, дифференциалдық операторларға арналған шекаралық есептер теориясында маңызды рөл атқарады.

Белгілі болғандай, шекаралық есептер аналитикалық функциялар теориясында (жалпы функциялар теориясы мен дифференциалдық теңдеулер теориясында) ерекше ғылыми маңызға ие дербес зерттеу саласын құрайды. Осы диссертациялық жұмыста үзіліссіз аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептер, алғаш рет Бесов кеңістіктерінде зерттелуде. Бұл кеңістіктер үзіліссіз (бірақ Гёльдер бойынша емес) функциялар кеңістігіне енгізілген, бұл зерттеудің ғылыми жаңалығын айқындайды. Бұған дейін мұндай және ұқсас есептерге Гёльдер үзіліссіздігі шарты қойылып қарастырылып келген.

Бесов кеңістіктерінің көмегімен дифференциалдық операторлар тығыздығының қасиеттерін, оның ішінде сингуляр интегралдарды [13], жоғалтусыз тікелей операторлардың өзіне тасымалдауға болады (қараңыз [14]). Бұл, өз кезегінде, классикалық дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің бар болуын қамтамасыз ететін шарттарды әлсіретуге мүмкіндік береді. Мысалы, толқындық теңдеу үшін мұндай қадам О.В. Бесовтың [15] еңбегінде жасалған, ал жазықтықтағы эллиптикалық жүйелер үшін [11] жұмысында қарастырылған. Мұндай зерттеулердің әрі қарай жалғасатынын сеніммен айта аламыз.

Демек, бұл диссертациялық жұмыстың нәтижелері сөзсіз басқа басым бағыттардағы зерттеулерге де пайдалы болады. Белгілі болғандай, Бесов кеңістіктерінің шкаласы, онда тегістік көрсеткіші бөлікті мәндер қабылдай алады, функцияларды класстарға дәл және егжей-тегжейлі жіктейді [16].

Диссертациялық жұмыстың мақсаты Бұл диссертациялық зерттеу көп байланысты облыстардағы, бөлікті аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептердің шешімділік шарттарын анықтауға бағытталған. Бұл шарттар үзіліссіз функциялар класында қарастырылып, олардың Бесов кеңістіктерінде орындалатыны дәлелденеді. Мұндай Бесов кеңістіктері коммутативті алгебра болып табылады, бұл олардың қасиеттерін функционалдық талдау әдістерімен тереңірек зерттеуге мүмкіндік береді.

Диссертациялық жұмыстың негізгі мақсатына жету үшін келесі зерттеу міндеттері қарастырылады:

Біртекті Риман есебінің Бесов кеңістіктеріндегі көп байланысты облыстағы шешімдерін жан-жақты зерттеу, сонымен қатар алынған шешімдердің шексіздік нүктесіндегі қасиеттерін талдау.

Көп байланысты облыстарда Бесов кеңістіктерінде біртектес емес Риман есебінің шешімін табу және оның шексіздік маңайындағы асимптотикалық қасиеттерін қарастыру.

Сингуляр интегралдық операторлардың Бесов кеңістіктеріндегі шенелгендігіне қатысты бұрын қойылған шарттарды әлсірету арқылы олардың жалпыланған нұсқасын ұсыну.

Ығысумен және ығысусыз сингуляр интегралдау операторларының белгілі бір комбинацияларының толық үзіліссіздігіне қатысты жаңа нәтижелерді тұжырымдау және оларды функционалдық кеңістіктер тұрғысынан сипаттау.

Бұл жұмыста алынған нәтижелер бөлікті аналитикалық функциялар теориясын, сондай-ақ Бесов кеңістіктеріндегі сингуляр интегралдық операторларды зерттеу саласын кеңейтіп, шекаралық есептер теориясына елеулі үлес қосады.

Зерттеу нысаны – үзіліссіз функциялар класына енгізілген Бесов кеңістіктерінде көп байланысты облыстарда бөлікті аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептер.

Зерттеу әдістері. Көп байланысты облыстарда бөлікті аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептерін Бесов кеңістіктерінде шешу үшін Коши тектес интеграл әдісі қолданылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыс шекаралық есептерді Бесов кеңістіктері тұрғысынан үзіліссіз функциялар класында (Гёльдер үзіліссіздігі талап етілмейді) шешудің әдісін ұсынады, бұл жұмыстың жаңалығына жатады. Белгілі болғандай, шекаралық түйіндес есепті шешу мен Коши тектес интегралдары бар сингуляр теңдеулер теориясы тығыз байланысты. Әрине, мұндай сингуляр интегралдық теңдеулер теориясын шекаралық түйіндес есептеріне жүгінбей-ақ дамытуға болады. Алайда, бұл есепті қарастыру теорияны ерекше қарапайым етеді.

Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы. Зерттеудің теориялық маңыздылығы шекаралық есептерді қарастыруда қолданылатын жаңа әдістерді дамытумен байланысты. Бұған дейін мұндай және ұқсас есептер Гёльдер бойынша үзіліссіздік шартымен зерттеліп келген. Ал бұл жұмыста Гёльдер үзіліссіздігіне қойылатын шарттар жойылып, есептердің шешімін кеңірек кеңістіктерде іздеу мүмкіндігі қарастырылған. Бұл теориялық тұрғыдан шекаралық есептердің жаңа қасиеттерін ашуға және олардың шешімдерін тереңірек түсінуге жол ашады.

Зерттеудің тәжірибелік маңыздылығы түрлі салалардағы математикалық модельдеуге қатысты. Шекаралық есептер көптеген физикалық және инженерлік процестерде қолданылады, соның ішінде гидродинамика, аэродинамика, электротехника және серпімділік теориясы сияқты салаларда маңызды рөл атқарады. Бесов кеңістіктерін пайдалану есептің шешімін дәлірек табуға мүмкіндік беріп, қолданбалы есептерді шешуде жаңа мүмкіндіктер ашады. Осылайша, зерттеу жұмысы математикалық теорияны кеңейтумен қатар, оны тәжірибеде қолдану мүмкіндігін арттырады, бұл оны ғылыми және практикалық тұрғыдан ерекше маңызды етеді.

Қорғауға ұсынылатын негізгі ғылыми нәтижелері.

Көп байланысты облыстағы біртекті және біртексіз Риман есебінің шешімі алғаш рет Бесов кеңістіктерінде алынды, шешімдердің шексіздіктегі қасиеттері зерттелді.

Бұл жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс «Математика және математикалық модельдеу бойынша іргелі зерттеулер», (2023-2025, BR20281002) жобасы бойынша ғалымдардың зерттеулерін гранттық қаржыландыру шеңберінде орындалды.

Автордың жеке үлесі. Диссертацияда алынған барлық ғылыми нәтижелер автордың ғылыми кеңесшілермен бірлесіп, тікелей қатысуымен алынды. Автор зерттеу әдістерін әзірлеуге, есептердің шешімін табуға және алынған нәтижелерді талдауға белсенді түрде атсалысты.

Ғылыми кеңесшілер есептің дұрыс қойылуына, зерттеудің негізгі бағыттарын айқындауға және алынған нәтижелерді талқылауға өз үлестерін қосты.

Диссертацияның сынақтан өтуі мен талқылануы. Диссертациялық жұмыста алынған негізгі нәтижелер халықаралық конференцияларда баяндалып талқыланды.

Диссертация тақырыбы бойынша 3 жұмыс Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда жарияланды.

Жарияланымдар:

1.N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Riemann problem for multiply connected domain in Besov spaces,” Boundary Value Problems, vol. 2024(1), 70, p. 9, 2024. https://doi.org/10.1186/s13661-024-01883-x. (Q1)

2.N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Boundary conjugation problem for piecewise analytic functions in Besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 69(5), pp. 849–856, 2024. https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2164887. (Q2)

3.N. K. Bliev, K. S. Tulenov, and N. M. Yerkinbayev, “Noetherian solvability and explicit solution of a singular integral equation with weighted carleman shift in besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 68, pp. 1264–1285, 2023. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2045975. (Q2)

Халықаралық конференциялар:

1.International congress on fundamental and applied sciences (ICFAS), Antalya, Turkey, 19-21 October.

2.VI International scientific conference “Non-local boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics”, December 5-9, 2021, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia.

3.International scientific workshop “OTHA Fall 2021”, December 13-17, 2021, Southern Federal University. Rostov-on Don, Russia.

4.International conference “Numerical functional analysis-2021” of ICAAM, November 22-24, 2021, Istanbul, Turkey.

5.Workshop on Banach Spaces and Banach Lattices II, Instituto de Ciencias Mathematicas, May 9-13, 2022, Madrid, Spain.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен сипаттамасы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 3 тараудан, қорытындыдан және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі – 79 бет. Әдебиеттер саны – 35.

1 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ БЕСОВ КЕҢІСТІКТЕРІ МЕН КОШИ ТЕКТЕС ИНТЕГРАЛДАР

Алдымен екі өлшемді облыстарға қатысты функционалдық кеңістіктердің кейбір негізгі анықтамаларын келтірейік. R^2 – екі өлшемді Евклид кеңістігі болсын, оның әрбір нүктесі нақты координаталар жұбы $x = (x_1, x_2)$ арқылы беріледі. Бұдан әрі барлық жиындардың өлшемдері мен интегралдары Лебег өлшемі бойынша қарастырылады.

$C(\bar{G})$ – $\bar{G} \subset R^2$ тұйық жиынында үзіліссіз анықталған нақты немесе комплекс мәнді функциялар кеңістігі болсын. Әрбір $f \in C(\bar{G})$ функциясының нормасы келесі түрде анықталады

$$\|f\|_{C(\bar{G})} = \sup_{x \in \bar{G}} |f(x)|. \tag{1.1}$$

Шенелген G жиыны үшін бұл норма келесі түрде жазылады

$$\|f\|_{C(G)} = \max_{x \in G} |f(x)|.$$

Егер $f(x)$ функциясы G жиынында анықталған және оның барлық m-ші ретті туындылары бар және олар үзіліссіз болса, онда мұндай функциялар кеңістігі $C^m(\bar{G})$ деп белгіленеді, мұндағы $m \geq 0$ – бүтін сан ($C^0 \equiv C$). Бұл кеңістік Банах кеңістігі болып табылады және оның нормасы келесі түрде беріледі

$$\|f\|_{C^m(\bar{G})} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k_1+k_2=k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_{C(\bar{G})}.$$

$H_\alpha(\bar{G})$ арқылы Гёльдер кеңістігі деп аталатын, Гёльдер шартының көрсеткіші α болатын үзіліссіз функциялар жиынын белгілейміз. Бұл жиындағы функциялар төмендегі шартты қанағаттандырады

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x, y \in \bar{G},$$

мұндағы M – функцияның Гёльдер тұрақтысы (немесе Липшиц тұрақтысы деп те аталады). Бұл кеңістіктегі элементтің нормасы келесі түрде анықталады

$$\|f\|_{H_\alpha(\bar{G})} = \|f\|_{C(\bar{G})} + \sup_{x,y\in\bar{G}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

$H_\alpha(\bar{G})$ Банах кеңістігін құрайды. Келесі белгілеуді еңгізейк

$$H(f) = \sup_{x,y\in\bar{G}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Сонымен қатар, $C^{m,\alpha}(\bar{G})(0 < \alpha \leq 1)$ Банах кеңістігін қарастырайық, оның элементтері $C^m(\bar{G})$ кеңістігінің функциялары болып табылады және келесі шартты қанағаттандырады

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}} \in H_\alpha(\bar{G}), \quad m_1 + m_2 = m.$$

Бұл кеңістік элементтерінің нормасы келесі түрде беріледі

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{G})} = \|f\|_{C(\bar{G})} + \sum_{m_1+m_2=m} H\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}\right).$$

$L_p(G)\,(1 \leq p < \infty)$ – G жиынында Лебег бойынша интегралданатын функциялар кеңістігі болсын. Мұнда норма

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.2)$$

$L_\infty(G)$ кеңістігінде норма келесі түрде анықталады

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G} |f(x)|.$$

Бұл кеңістік те Банах кеңістігі болып табылады.

$f \in L_p(G)$ үшін айырым операторын келесі түрде анықтаймыз

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x), \qquad x \in R^2, \qquad h \in R^2,$$

$m > 1$ натурал сан үшін

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h[\Delta_h^{m-1} f(x)] = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{j}{m} f(x + jh).$$

Зерттелетін есептің сипатына сәйкес, екі өлшемді $G \subset \mathbb{C} \equiv R^2$ аймақтағы (x_1, x_2) нүктелерінің жиынында функционалдық кеңістіктер қарастырылады. $z = x_1 + ix_2$ тен тәуелді функция

$$f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$$

түрінде анықталады, мұндағы $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$ функциялары келесі шартты қанағаттандырады

$$u_{x_1} - v_{x_2} = 0, \qquad u_{x_2} + v_{x_1} = 0.$$

Бұл $f(z)$ функциясының комплекс айнымалы z үшін голоморфты екенін көрсетеді. Комплекс айнымалылардың және функциялардың түйіндесі келесі түрде беріледі $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $\overline{f(z)} = u(x_1, x_2) - iv(x_1, x_2)$.

Айнымалылар z және $\bar{z}$ бойынша жалпыланған туындылар келесі операциялар көмегімен енгізіледі

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Бұл туындылар тікелей де анықталуы мүмкін [17].

Осы белгілеулерге сүйене отырып, Бесов кеңістігінің анықтамасы келесі түрде беріледі.

А н ы қ т а м а . $1 \le \theta \le \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$ болсын, мұндағы $\bar{r}$ – бүтін сан, $0 < \alpha \le 1$. Егер $f \in L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, және оның барлық $\bar{r}$-ші ретті жалпыланған $\frac{\partial^{\bar{r}} f}{\partial\, \bar{z}^j \partial \mathrm{z}^{\bar{r}-j}}$, $(j = 1,2, \dots, \bar{r})$ туындылары бар болса, сондай-ақ төменде берілген норма шенелген болса,

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{j=0}^{\bar{r}} \left(\iint\limits_{S^0} |h|^{-2-\alpha\theta} \left\| \Delta_h \frac{\partial^{\bar{r}} f}{\partial\, \bar{z}^j \partial \mathrm{z}^{\bar{r}-j}} \right\|_{L_p(G)}^{\theta} dS_h^0 \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad (1.3)$$

мұндағы S^0 – шеңбер, $|h| < \delta$, $\delta > 0$ – жеткілікті кіші сан, онда f функциясы $B_{p,\theta}^r(G)$ Бесов кеңістігінің элементі деп аталады.

1.1 Коши тектес интегралдың анықтамасы және мысалдар

Математикалық физика теңдеулерін зерттеу барысында көрсетілгендей, Лаплас теңдеуінің шекаралық есептері (мысалы, Дирихле және Нейман есептері) қарапайым және қос қабатты потенциалдар әдістері арқылы шешіледі. Ал басқа дифференциалдық теңдеулердің шекаралық есептерін шешу үшін әртүрлі жалпыланған потенциалдар қолданылады.

Комплекс айнымалы функциялар теориясында шекаралық есептерді шешудің негізгі құралы ретінде Коши тектес интеграл мен оның жалпыланған түрлері қолданылады.

L деп комплекс айнымалы z жазықтығындағы тегіс тұйық контурды белгілейік. L контурының ішіндегі аймақ ішкі (қарапайым байланысқан) аймақ деп аталып, D^+ арқылы белгіленеді, ал оған қарама-қарсы аймақ, яғни $D^+ + L$ контурының толықтырушысы, сыртқы аймақ деп аталып, D^- $(\infty \in D^-)$ арқылы белгіленеді.

Егер $f(z)$ функциясы D^+ аймағында аналитикалық функция болса және $D^+ + L$ аймағында үзіліссіз функция болса, онда комплекс айнымалы функциялар теориясында Коши формуласына сәйкес

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \tag{1.4}$$

нәтижесіне ие боламыз.

Егер, керісінше, $f(z)$ функциясы D^- аймағында аналитикалық және $D^- + L$ аймағында үзіліссіз болса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \tag{1.5}$$

теңдігі орынды.

Ескере кететін жағдай, L -дің оң бағыттағы қозғалысы, D^+ сол жағында болатын бағыт ретінде қабылданады.

Коши формуласы шекарадағы мәндері белгілі болған жағдайда функцияның аймақтағы әр бір нүктедегі мәнін есептеуге мүмкіндік береді. Сол себепті Коши формуласы аналитикалық функциялардағы шекаралық есептерін шешеді деп айтуға болады. (1.4) және (1.5) формулаларының сол жағындағы

интеграл Коши интегралы деп аталады. Енді L -ді жазықтықтың шенелген бөлігіндегі толықтай орналасқан, тұйық не ашық контур деп алайық. Сонымен қатар, τ контурдағы нүктелердің комплекс координатасы және $\varphi(\tau)$ контурдағы нүкте бойынша үзіліссіз функция болсын. Онда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{1.6}$$

Коши интегралы сияқты есептелген, Коши тектес интеграл деп аталады. Мұндағы $\varphi(\tau)$ оның тығыздығы, ал $\frac{1}{\tau - z}$ – ядросы. Коши тектес интегралдың z комплекс айнымалы жазықтығында, L контурдағы нүктелерден басқа барлық жерде аналитикалық функция құрайтыны оңай байқалады.

Т е о р е м а 2.1. [4, 17 бет] L – тегіс (тұйық немесе ашық) контур болсын, $f(\tau, z)$ функциясы $\tau \in L$ айнымалысы бойынша үзіліссіз және $z \in D$ айнымалысы бойынша барлық τ мәндері үшін аналитикалық функция болсын. Онда қисық сызықты интегралмен берілген функция

$$F(z) = \int_L f(\tau, z)\,d\tau,$$

z айнымалысы бойынша аналитикалық функция болады.

Үзіліссіз $\varphi(\tau)$ тығыздығы бар Коши тектес интеграл үшін интеграл астындағы функция z-ге қатысты аналитикалық болуын тоқтататын жалғыз нүктелер - бұл интегралдау L сызығының нүктелері. Егер L ашық контур болса, $\Phi(z)$ функциясы барлық жазықтық бойынша, L қоса алғанда, аналитикалық функция болып табылады. Енді L тұйық контур деп алайық, онда $\Phi(z)$ функциясы екі тәуелсіз функцияға бөлінеді: D^+ -та анықталған $\Phi^+(z)$ және D^--та анықталған $\Phi^-(z)$. Бұл функциялар бір-бірінің аналитикалық жалғасы болып табылмайды. Екі облыста D^+ және D^- анықталған, жазықтықтың бүкіл кеңістігінде бірін-бірі толықтыратын, екі тәуелсіз $\Phi^+(z)$ және $\Phi^-(z)$ функциялары арқылы берілген аналитикалық функция $\Phi(z)$ бөлікті аналитикалық функция деп аталады.

Енді Коши тектес интегралдың маңызды қасиетін атап өтейік. Коши тектес интеграл (1.6) формуласымен анықталған $\Phi(z)$ функциясы шексіздік нүктесінде нөлге айналады. Атап айтқанда, $\Phi(z)$-ны шексіздіктің маңайында $\frac{1}{z}$-тың дәрежелері бойынша қатарға жіктейік

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - -\frac{\tau}{z^2} - \cdots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \cdots,$$

қатарды $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$-ға көбейтіп, мүшелеп интегралдаймыз

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},$$

мұндағы

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \varphi(\tau) d\tau.$$

Қатарда нөлдік дәреже болмайтындықтан

$$\Phi^-(\infty) = 0$$

екені шығады.

М ы с а л . Тығыздығы $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau-2)}$ болатын, шеңбер бойымен ($| z |= 1$) Коши тектес интегралды есептейік, яғни

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - 2} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

$\frac{1}{z-2}$ функциясы D^+-те аналитикалық, ал $\frac{1}{z}$ функциясы D^--те аналитикалық және шексіздік нүктесінде нөлге айналады. (1.4) формуласына сәйкес бірінші интеграл $z \in D^+$ үшін $\frac{1}{z-2}$-ге тең, $z \in D^-$ үшін нөлге тең. Екінші интеграл (1.5) формуласына сәйкес $z \in D^-$ үшін $-\frac{1}{z}$-ке тең, $z \in D^+$ үшін нөлге тең. Сондықтан

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z - 2}, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}.$$

2 КӨП БАЙЛАНЫСҚАН АЙМАҚТАРДА РИМАННЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРІН ЖӘНЕ СПЕКТРЛІК $\mathbb{R}$-СЫЗЫҚТЫ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕРІ

$L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ контурлар жүйесі берілсін. Мұнда L_0 контуры қалған барлық $L_1, L_2, \ldots, L_m$ контурларын өз ішіне қамтиды деп ұйғарайық.

Осы контурлармен шектелген D^+ аймағы L_0 контурының ішкі жағында, бірақ $L_1, L_2, \ldots, L_m$ контурларының сыртқы жағында орналасқан $m+1$ байланысқан аймақ болсын.

$D^+ \cup L$ жиынының толықтырушысы ретінде бүкіл жазықтықтағы аймақты D^- деп белгілейміз. Яғни, D^- бұл D^+ аймағының сыртқы толықтырушысы болып табылады.

Координаталар бас нүктесі D^+ аймағының ішінде орналасқан деп аламыз. Контурлар бағытын былай таңдаймыз: L-дің оң бағыты ретінде D^+ облысы сол жақта қалатындай бағыт қабылданады.

Осыған сәйкес, L_0 контуры сағат тіліне қарсы бағытта, ал $L_1, L_2, \ldots, L_m$ контурлары сағат тілімен бағытталған деп есептеледі.

Тұйық L контурда $G(t)$ және $g(t)$ функциялары берілсін, және $G(t) \neq 0$. Әрі қарай, бұл функциялар Бесов $B^r_{p,\theta}(L)$ кеңістігіне тиесілі деп ұйғарамыз, мұндағы r, p, θ параметрлер келесі шарттардың біреуін қанағаттандырады

(I) $1 < p < 2, \theta = 1, r = 1/p,$

(II) $1 < p < 2, \theta \geq 1, r > 1/p,$

(III) $p \geq 2, \theta \geq 1, r > 1 - 1/p.$

Сонымен қатар, келесі теңсіздік орындалады деп болжаймыз

$$r + \frac{1}{p} - 1 < \nu \leq 1,$$

және $L \in C^{1,\nu}$, мұндағы $C^{1,\nu}$ – Гёльдер индексі ν -ге қатысты үзіліссіз туындысы бар функциялар класы.

$\Phi(z)$ бөлікті-аналитикалық функция болсын. Ол келесі екі функциядан тұрады: $\Phi^+(z)$ функция D^+ облысында аналитикалық, ал $\Phi^-(z)$ функция D^- облысында, соның ішінде $z = \infty$ нүктесін қоса алғанда аналитикалық болады.

$\Phi^+(z)$ және $\Phi^-(z)$ функцияларының L -дегі шекаралық мәндері сәйкесінше $\Phi^+(t)$ және $\Phi^-(t)$ деп белгіленеді.

Бұл функциялар контур L-дің бойында келесі сызықтық шекаралық шарттардың бірін қанағаттандыруы қажет

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad \text{(біртекті есеп)} \tag{2.1}$$

немесе

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad \text{(біртекті емес есеп).} \tag{2.2}$$

мұндағы $t \in L$.

Риман шекаралық есебінің келесі түрін қарастырайық. Бұл есеп кейінгі зерттеулерде негізгі рөл атқарады және аналитикалық функциялар теориясындағы шекаралық есептердің маңызды үлгісі болып табылады

Е с е п 2.1. $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ функциясы берілсін. $\Phi(z)$ бөлікті-аналитикалық функцияны табу қажет, ол шексіздік нүктесінде шенелген, $A \geq 0$ мәнін қабылдайды және L контурынан өткенде $\varphi(t)$ секірісіне ие болады, яғни L контурында келесі шартты қанағаттандырады

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \qquad t \in L \tag{2.3}$$

Е с е п 2.1-дің шешімі бар және ол жалғыз. Ізделінетін $\Phi(z)$ функция Коши тектес интеграл арқылы келесі түрде өрнектеледі

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + A. \tag{2.4}$$

Бұл өрнек қарапайым байланысқан облыс жағдайындағы шешіммен ұқсас және Сохоцкий–Племеля формулаларынан тікелей шығады. Аталған формулалар көп байланысқан және қарапайым байланысқан облыстар үшін бірдей орындалады ([4], 1-тарау, 8.7-бөлім). Біздің қарастырылып отырған шарттарымызда (2.4) формуласындағы Коши тектес интеграл $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(D^+)$ кеңістігіне жатады, мұндағы

$$\alpha = r + \frac{1}{p} - 1$$

([11], 1-тарау, Лемма 1.2, 61 бет), сонымен қатар, тұйық облыстағы үзіліссіз функциялар $C(\overline{D^+})$ кеңістігіне енеді [16], ал келесі бағалау орындалады

$$\|\Phi\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(D^+)} \leq M\|\varphi\|_{B^r_{p,\theta}(L)},$$

мұндағы $M > 0$ тұрақты шама φ функциясына тәуелді емес.

$A = 0$ болған жағдайда Коши тектес интегралдың шекаралық мәндері $\Phi^+(t)$ және $\Phi^-(t)$ үшін Сохоцкий–Племеля формулалары орындалады ([11], 1-тарау, Лемма 1.2, Следствие 2 дәлелдемесіне қараңыз, 63 бет).

(I) жағдайында $B^{1/p}_{p,1}(L)$ кеңістігі үзіліссіз функциялар кеңістігі $C(L)$-ге енеді, бірақ Гёльдер кеңістігіне $H_\beta(L),\ 0 < \beta < 1$ кірмейді [16].Осылайша, $B^{1/p}_{p,1}(L)$ класына жататын, контурда үзіліссіз, бірақ Гёльдер шартын қанағаттандырмайтын функциялар $\varphi(t)$ анықталады. Мұндай функциялар үшін Коши тектес интеграл $\overline{D^+}$ тұйық облысында үзіліссіз болып табылады және Сохоцкий–Племеля формулалары орындалады.

Бұл нәтиже маңызды, себебі жалпы жағдайда кез келген үзіліссіз тығыздық үшін Коши тектес интегралдың тұйық облыста үзіліссіз болуы міндетті емес екені белгілі. $B^{1/p}_{p,1}(L)$ класына жататын функциялар L_p-нормасында Гёльдер теңсіздігін қанағаттандырады.

(II) және (III) шарттарында

$$\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(L) \hookrightarrow H_\beta(L),\quad 0 < \beta < 1,$$

және осы жағдайларда Коши тектес интегралдың $\Phi(z)$ функциясы $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(D^+)$ кеңістігіне жатады. Бұл жағдайда $\Phi(z)$-ның жалпыланған туындылары $B^{\alpha}_{p,\theta}(D^+)$ кеңістігінде болады.

Қ о р ы т ы н д ы 2.1. Кез келген $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ функциясы аналитикалық функциялардың $\Phi^+(z)$ және $\Phi^-(z)$ шекаралық мәндерінің $\Phi^+(t)$ және $\Phi^-(t)$ айырмасы түрінде бірегей түрде көрсетуге болады, мұндағы $\Phi^-(\infty) = A \geq 0$ қосымша шарты орындалады.

2.1 Біртекті Риман шекаралық есебінің аналитикалық шешімін табу

Біз [4], [5]-дан кеңінен қабылданған кейбір терминдер мен ұғымдарды қолданамыз. L_k $(k = 1,2, \dots, m)$ контурындағы $G(t)$ функциясының индексін

$$\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}[arg\, G(t)]_{L_k}$$

деп белгілейміз, мұндағы $[\cdot]_{L_k}$ символы – жақшалар ішіндегі өрнектің L_k контуры бойымен оң бағытта бір рет айналу кезіндегі аргументтің жалпы өсімін білдіреді.

Есептің жалпы индексі келесі түрде анықталады

$$\varkappa = \sum_{k=0}^{m} \varkappa_k.$$

Келесі функцияны енгізейік

$$\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k},$$

мұндағы z_k сәйкесінше L_k контурларының ішінде жататын кейбір нүктелер. Келесі формуланы аламыз

$$\frac{1}{2\pi}\left[arg \prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k}\right]_{L_j} = \frac{1}{2\pi}\left[arg(t - z_j)^{\varkappa_j}\right]_{L_j} = -\varkappa_j, (j = 1,2, \dots, m),$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{arg\left[G(t)\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k}\right]\right\}_{L_0} = \frac{1}{2\pi}[arg\, G(t)]_{L_0} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}[arg(t - z_k)^{\varkappa_k}]_{L_0}$$
$$= \varkappa_0 + \sum_{k=1}^{m}\varkappa_k = \varkappa.$$

D^+ облысының ішінде орналасқан нөлді ескере отырып, біз мынаны аламыз:

$$\left\{arg\left[t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}G(t)\right]\right\}_L = 0. \qquad (2.5)$$

Енді (2.1) түрінде жазылған біртекті Риман шекаралық есебінің шешілетін шарттарын тұжырымдауға болады [25].

Т е о р е м а 2.1. r, p, θ параметрлер (I) – (III) шарттарының бірімен анықталсын. $G(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ және $G(t) \neq 0, \quad t \in L$ болсын. Егер Риман шекаралық есебінің индексі $\varkappa > 0$ болса, онда (2.1) теңдеуінің $\alpha = r + \frac{1}{p} - 1$ параметірі үшін $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(D^+)$ кеңістігінде $\varkappa + 1$ сызықты тәуелсіз шешімі бар. Бұл шешімдер келесі түрде өрнектеледі

$$\Phi_l^+(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)}z^l, \quad \Phi_l^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}z^{l-\varkappa}, \qquad l = 0,1,\dots,\varkappa,$$

мұндағы

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{log\, G(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Жалпы шешім келесі формуламен беріледі

$$\Phi^+(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)}P_\varkappa(z), \quad \Phi^-(z) = z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}P_\varkappa(z),$$

мұндағы $P_\varkappa(z)$ $\varkappa$ дәрежелі көпмүшелік. Егер $\varkappa = 0$ болса, онда (2.1) шешімі келесі түрде жазылады

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}, \qquad \Phi^-(\infty) = A \neq 0.$$

Егер $\varkappa < 0$ болса, онда біртекті Риман шекаралық есептің тек тривиалды шешімі ғана бар.

Д ә л е л д е у . Біртекті (2.1) есепті келесі түрде қайта жазайық

$$\Phi^+(t) = \frac{t^{\varkappa}}{\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}}\left[t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}G(t)\right]\Phi^-(t). \qquad (2.6)$$

Мұндағы

$$G_1(t) = t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}G(t) \qquad (2.7)$$

функция $B^r_{p,\theta}(L)$ кеңістігіне тиесілі болады ([11], 1-тарау, 6-бөлім).

L контуры бойындағы $G_1(t)$ функциясының индексі (2.5) формуласына сәйкес нөлге тең. Осыған байланысты, $log\, G_1(t)$ функциясы L контуры бойында бірмәнді болады және

$$log\, G_1(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$$

шартын қанағаттандырады.

Айта кету керек, үзіліссіз функциялар класына жататын Бесов кеңістігінің элементтері көбейту операциясына қатысты тұйық екені белгілі [11].

(2.6) шартымен берілген L контуры бойындағы біртекті есепті нөлдік секірісі бар бөлікті-аналитикалық функцияны табу есебіне келтіруге болады. Бұл түрлендірудің жүзеге асуы үшін $G_1(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ функциясы нөлдік индексте ие және D^+, D^- аймақтарында аналитикалық, сондай-ақ осы аймақтарда нөлге тең болмайтын функциялардың шекаралық мәндері ретінде өрнектелуі қажет.

Осы мақсатта келесі көмекші біртекті есепті қарастырамыз. D^+ және D^- аймақтарында аналитикалық болатын бөлікті-аналитикалық $\Phi(z)$ функциясын табу керек, ол L сызығында келесі шекаралық шартты қанағаттандырады

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\Phi_1^-(t), \qquad \Phi_1^-(\infty) = A \neq 0. \qquad (2.8)$$

Шекаралық шарт (2.8)-ге логарифм қолданайық

$$log\, \Phi_1^+(t) - log\, \Phi_1^-(t) = log\, G_1(t), \qquad (2.9)$$

мұндағы $log\, G_1(t)$ үшін кез келген тармақ таңдап алуға болады. Соңғы нәтиженің таңдалған тармаққа тәуелсіз екенін тексеру оңай. Бұған дейін көрсетілгендей, $log\, G_1(t)$ бірмәнді функция, ал $log\, \Phi_1^+(t)$ және $log\, \Phi_1^-(t)$

сәйкесінше D^+ және D^- аймақтарында аналитикалық болады, Қ о р ы т ы н д ы 3.1-ді қараңыз.

Осылайша, біз L сызығында берілген секіріс арқылы анықталатын бөлікті-аналитикалық функцияны табу есебіне келдік (Е с е п 2.1 қараңыз). Қосымша шарт $\Phi_1^-(\infty) = A \neq 0$ кезінде шешімі мына формуламен беріледі:

$$log\, \Phi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{log\, G_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + log\, A.$$

Келесі белгілеуді еңгізейк

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{log\, G_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + log\, A.$$

Сохоцкий–Племеля формулаларына сәйкес, (2.8) есебінің шешімі келесі түрде жазылады

$$\Phi_1^+(z) = Ae^{\Gamma_1^+(z)}, \qquad \Phi_1^-(z) = Ae^{\Gamma_1^-(z)},$$

және бұл функциялар $A \neq 0$ болғандықтан нөлге тең болмайды. Осыған байланысты $G_1(t)$ функциясы (2.9) теңдеуден көрініп тұрғандай келесі түрде өрнектеледі

$$G_1(t) = \frac{e^{\Gamma_1^+(z)}}{e^{\Gamma_1^-(z)}}, \tag{2.10}$$

мұндағы

$$\Gamma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{log\, G_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + log\, A \in B_{p,\theta}^{1+\alpha}(D^+) \hookrightarrow C\left(\overline{D^+}\right).$$

$G_1(t) \in B_{p,\theta}^r(L)$ болғандықтан, ол нөлдік индексе ие және $\Phi_1^+(t)$, $\Phi_1^-(t)$ функцияларының қатынасы ретінде өрнектеледі. Бұл функциялар қосымша біртекті есептің L контурындағы шекаралық шешімдері болып табылады және еш жерде нөлге тең болмайды.

(2.6) теңдеудегі бастапқы біртекті есепке қайта оралайық. $G_1(t)$ функциясын (2.10) түрінде жазып, есеп шартын келесі түрде қайта жазамыз

$$\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{\varkappa_k}\frac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}=z^{\varkappa}\frac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}},$$

мұндағы

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

бұл теңдеуден көрініп тұрғандай

$$\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{\varkappa_k}\frac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}$$

функциясы D^+ облысында аналитикалық, ал

$$z^{\varkappa}\frac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$$

Бұл екі функция L контуры арқылы бір-бірінің аналитикалық жалғасы болып табылады, демек, олар бүкіл жазықтықта тек бір сингуляр нүктеге – шексіздікке – ие аналитикалық функцияның тармақтары. Жалпыланған Лиувилль теоремасына сәйкес, мұндай функция $\varkappa$ дәрежелі көпмүшелік болады. Сондықтан, есептің жалпы шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$\Phi^+(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)}P_{\varkappa}(z),\quad \Phi^-(z)=z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}P_{\varkappa}(z),\quad (2.11)$$

мұндағы $P_{\varkappa}(z)$ – $\varkappa$ дәрежелі көпмүшелік.

Егер Риманның шекаралық есебінің индексі $\varkappa>0$ болса, онда бұл есеп $\varkappa+1$ сызықтық тәуелсіз шешімі бар

$$\Phi_l^+(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)}z^l,\quad \Phi_l^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}z^{l-\varkappa},\qquad l=0,1,\dots,\varkappa,$$

жалпы шешім $\varkappa + 1$ тұрақтыны қамтиды және (2.11) формула арқылы беріледі. Егер $\varkappa = 0$ болса, онда біз қосымша біртекті есепге келеміз және есебінің шешімі келесі түрде болады

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}.$$

Егер $\varkappa < 0$ болған жағдайда есептің тек тривиалды шешімі ғана бар.

(2.11) формуладан көрініп тұрғандай, $\Phi^-(\infty)$ мәні $P_\varkappa(z)$ көпмүшелігінің $z^\varkappa$ коэффициентіне тең.

Егер $\Phi^-(\infty) = 0$ шарты орындалса, онда есептің жалпы шешімі (2.11) формуласымен анықталады, бірақ бұл жағдайда $P_\varkappa(z)$ көпмүшелігі дәрежесі $\varkappa - 1$-ге дейін төмендетіліп, $P_{\varkappa-1}(z)$ көпмүшелігімен ауыстырылады. Бұл жағдайда есеп $\varkappa$ сызықты тәуелсіз шешімге ие болады.

Осылайша, дәлелдеу толық аяқталды.

2.2 Біртекті емес Риман шекаралық есебінің аналитикалық шешімі

$G(t)$ коэффициентін

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

түрінде көрсету орынды. Мұндағы $X(z)$ жазықтықтың шектеулі аймағында нөлге тең болмайтын, біртекті есептің ерекше шешімі болып табылады. Бұл шешімнің шекаралық мәндері L контур бойында да нөлге тең емес деп ұйғарылады. Мұндай шешім канондық шешім деп аталады. Сонымен қатар, бұл шешімнің шексіздікте полюске ие болуы мүмкін екені ескеріледі.

Қажетті $X^+(t), X^-(t)$ функцияларының бар болуы мен олардың нақты түрлері (2.8) және (2.10) теңдеулерінен анықталады

$$X^+(t) = \prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma^+(t)}, \qquad X^-(t) = t^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(t)}. \qquad (2.12)$$

Егер $\varkappa \geq 0$ болса, онда $X(z)$ функциясы біртекті есептің шешімі болып табылады, әрі $X^+(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ кеңістігіне жатады ([11], I тарау, 6-бөлім). Ал $\varkappa < 0$ болған жағдайда, бұл функция шексіздікте $\varkappa$ ретті полюске ие болады.

Төменде келтірілген нәтиже біртекті емес (2.2) есептің шешімі болу шарттарын анықтайды [25].

Т е о р е м а 2.2. r, p, θ параметрлері (I)–(III) шарттарының біріне сәйкес таңдалсын. . $G(t), g(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$ және $G(t) \neq 0$ әрбір $t \in L$ үшін орындалсын.

Егер $\varkappa \geq 0$ болса, онда (2.2) есебінің жалпы шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau + X(z)P_{\varkappa-1}(z). \qquad (2.13)$$

мұндағы $P_{\varkappa-1}(z)$ дәрежесі $\varkappa - 1$ -ден аспайтын көпмүшелік.

Егер $\varkappa = 0$ болса, онда $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ болады.

Егер $\varkappa < 0$ болса, онда (2.2) есебінің шешімі бар болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті

$$\int\limits_L \frac{\tau^k g(\tau)}{X^+(\tau)}d\tau = 0, \;\; k = 1,2, \dots, -\varkappa - 1. \qquad (2.14)$$

Бұл жағдайда шешім (2.13) формуласымен анықталады, мұндағы $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$.

Д ә л е л д е у. Канондық шешім $X(z)$ жоғарыда анықталған түрде берілсін. Есептің коэффициентін келесі қатынаспен өрнектейік $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$. Осы жағдайда шекаралық шарт (2.2) теңдеуін төмендегідей жазуға болады

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \qquad t \in L,$$

мұндағы

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} \in B^r_{p,\theta}(L),$$

себебі

$$X^+(t) \in B^r_{p,\theta}(L)$$

және $X^+(t)$-ның L контур бойында нөлге тең болмайтыны белгілі ([11], I тарау, 6-бөлім).

Осылайша, берілген есеп қайтадан берілген шекаралық бөлікті-аналитикалық функцияны табу есебіне келтіріледі. Мұндай есеп Е с е п 2.1 ретінде бұрын қарастырылған.

Біртекті есептің канондық шешімінің $X(z)$ функциясының шексіздіктегі тәртібі (2.12) формуласына сәйкес сипатталады. Бұдан

$$\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$$

функциясының шексіздіктегі өсу дәрежесі $\varkappa > 0$-ден аспайтыны шығады. Сондықтан, Е с е п 2.1-ге ұқсас негіздемені қолдана отырып, келесі нәтижеге қол жеткіземіз

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau + P_\varkappa(z),$$

мұндағы $P_\varkappa(z)$ – дәрежесі $\varkappa$ -дан аспайтын көпмүшелік. Осыдан біртекті емес (2.2) есептің жалпы шешімін аламыз

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau + X(z)P_\varkappa(z). \qquad (2.15)$$

Демек, $\varkappa \geq 0$ болған жағдайда, біртекті емес (2.2) есептің шешімі (2.15) формуласымен беріледі. Егер $\varkappa = 0$ болса, онда $P_\varkappa(z) \equiv 0$ болады. Егер $\varkappa < 0$ болса, $X(z)$ функциясы шексіздікте $-\varkappa$ тәртіптегі полюске ие болады, сондықтан (2.15) формуласында $P_\varkappa(z) \equiv 0$ деп қабылданады. Коши тектес интеграл, жалпы жағдайда, шексіздікте бірінші ретті нөлге ие. Осылайша, $\Phi^-(z)$ функциясы шексіздікте $-\varkappa - 1$ -ден жоғары емес ретті полюске ие болады. Сондықтан, егер $\varkappa < -1$ болса, біртекті емес (2.2) есеп жалпы жағдайда шешілмейді. Бұл есеп тек белгілі бір қосымша шарттарды қанағаттандырған жағдайда ғана шешілетін болады. Осы шарттарды алу үшін, (2.15)-тен алынған Коши тектес интегралды шексіздік маңайында қатарға жіктейміз

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau.$$

Осыдан $\varkappa < -1$ болған жағдайда, біртекті емес есептің шешімінің бар болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті екені анықталады

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \;\; k = 1,2,\dots,-\varkappa - 1.$$

Егер $\varkappa = -1$ болса, онда біртекті емес (2.2) есептің шешімі бар және ол жалғыз болады.

Ізделінетін шешімнің шексіздікте нөлге тең болуы талап етілсе, онда (2.15) формулада берілген $P_\varkappa(z)$ көпмүшелігінің орнына дәрежесі $\varkappa - 1$-ден аспайтын $P_{\varkappa-1}(z)$ көпмүшелігін қолдану қажет. Осылайша, $\varkappa \geq 0$ болған жағдайда, шексіздікте нөлге ұмтылатын біртекті емес есептің жалпы шешімі келесі түрде өрнектеледі

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau + X(z)P_{\varkappa-1}(z),$$

Ал $\varkappa = 0$ жағдайында $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ деп есептеледі.

Егер $\varkappa < 0$, онда шешімнің болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті әрі жеткілікті

$$\int_L \frac{\tau^k g(\tau)}{X^+(\tau)}d\tau = 0, \;\; k = 1,2,\dots,-\varkappa - 1.$$

Бұл жағдайда шешім келесі формуламен беріледі

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau.$$

Ескерте кетсек, $\varkappa = 0$ жағдайында әрдайым шексіздікте нөлге тең жалғыз шешім бар, $\varkappa < 0$ болғанда, егер шексіздікте нөлге тең шешім бар болса, ол да жалғыз болады, $\varkappa < 0$ үшін шешім $\varkappa$-ға тәуелді тұрақтыларды қамтиды. Осылайша, дәлелдеме аяқталды.

2.3 Спектрлік $\mathbb{R}$-сызықты есеп

Қателіктер мен түсінбеушіліктердің алдын алу мақсатында жиі қолданылатын функциялар кеңістіктеріне қатысты нақты белгілеулерді енгізейік.

Екі өлшемді Евклид кеңістігіндегі $\mathbb{R}^2$-де орналасқан шенелген аймақты D деп белгілейік. $L_2(D)$ бұл D аймағында анықталған нақты мәнді функциялардан құралған Гильберт кеңістігі. Бұл кеңістік келесі скаляр көбейтінді арқылы анықталады

$$(f, g)_{L_2(D)} = \int_D f(x)g(x)dx,$$

және оған сәйкес норма

$$\|f\|_{L_2(D)} = \left(\int_D |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Айнымалы ретінде

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

векторымен қатар, жазықтықтағы комплекс айнымалыны да пайдаланамыз

$$z = x_1 + ix_2,$$

мұндағы $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$.
$D \cup \mathbb{C}$ аймағында комплекс мәнді функцияларды қарастырайық

$$\varphi(z) = f(x) + i\tilde{f}(x), \qquad \psi(z) = g(x) + i\tilde{g}(x).$$

Бұл жағдайда $L_2(D)$ кеңістігі комплекс мәнді функциялар үшін келесі скаляр көбейтіндімен анықталатын Гильберт кеңістігіне айналады

$$(\varphi,\psi)_{L_2(D)} = \int\limits_D \varphi(z)\overline{\psi(z)}dx.$$

Сәйкесінше, $H^1(D) \equiv H^{1,2}(D)$ бұл Соболев кеңістігі ([18], 11-тарау), яғни мұндағы $L_2(D)$ кеңістігін жататын функциялардың дербес туындылары да $L_2(D)$ кеңістігіне жатады

$$H^1(D) = \left\{u \in L_2(D): \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(D), \qquad i = 1,2\right\}.$$

Бұл кеңістік скаляр көбейтіндісімен Гильберт кеңістігі болады

$$(u,v)_{H^1(D)} = \int\limits_D u(x)v(x)dx + \int\limits_D \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx,$$

және сәйкес нормасы

$$\|u\|_{H^1(D)} = \left(\int\limits_D |u(x)|^2 dx + \int\limits_D |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad (2.16)$$

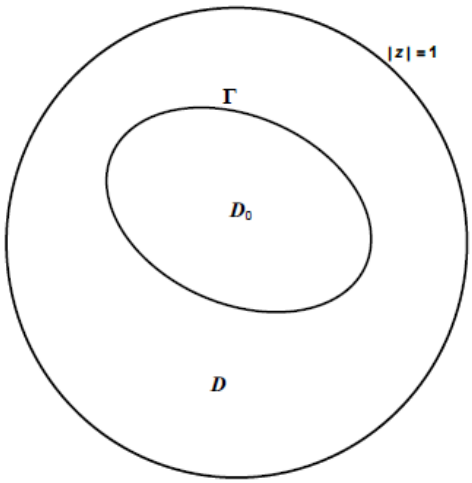
мұндағы ∇ – набла операторы және

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

түрінде жазылады, мұндағы $\boldsymbol{i}$ және $\boldsymbol{j}$ бағытталған бірлік векторлар. Сондай-ақ, $H^1(D)$ кеңістігі

$$\left\{u \in C^\infty(D): \|u\|_{H^1(D)} \le \infty\right\}. \qquad (2.17)$$

жиынының (2.16) нормасы бойынша толықтырылуы ретінде анықталатыны белгілі. Егер ∂D (шегі бос емес жағдайда) C^∞ болса, онда $C^\infty(\overline{D})$ жиыны $H^1(D)$-де берілген метрика бойынша тығыз болады.



Сурет-1

D_0 бірлік $\mathbb{U} = \{|z| \le 1\}$ дөңгелегінің ішкі бөлігінде орналасқан аймақ болсын. Оның шекарасы сағат тіліне қарсы бағытта бағдарланған тұйық Ляпунов контуры $\Gamma = \partial D_0$ арқылы анықталсын. Сонда D аймағы $\mathbb{U}$ бірлік дөңгелегінен $D_0 \cup \Gamma$ аймағын алып тастағанда алынатын толықтырушы аймақ ретінде анықталады. Бұл құрылым Сурет-1-де көрнекі түрде бейнеленген. Қос байланысқан D облысының шекарасы $\partial D = \partial\mathbb{U} \cup (-\Gamma)$ түрінде жазылады.

Анықтық үшін $0 \in D_0$ деп ұйғарамыз. Айнымалы $u(z)$ және $v(z)$ функциялары сәйкесінше D және $\mathbb{U}$ аймақтарында гармониялық және олардың тұйықталуында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын. $u(z)$ функциясы үшін контур Γ бойында келесі Дирихле шекаралық шарты орындалсын

$$u(z) = 0, \qquad z \in \Gamma, \tag{2.18}$$

ал $\partial\mathbb{U} = \{|z| = 1\}$ бойында келесі шекаралық шарттар орындалсын

$$u(z) = \lambda v(z), \qquad \frac{\partial u(z)}{\partial n} = \frac{\partial v(z)}{\partial n}, \qquad |z| = 1, \tag{2.19}$$

мұндағы $\frac{\partial}{\partial n}$ – $\partial\mathbb{U}$ шекарасындағы нормаль туынды.

Сонымен қатар, $u(z)$, $v(z)$ және λ сәйкесінше (2.18)-(2.19) теңдеулерінің меншікті функциялары және меншікті мәні деп аталады. Белгілеуді оңайлату мақсатында белгісіз гармониялық функцияларды келесі түрде жазайық

$$u(z) \equiv u_q(z) \qquad \text{және} \qquad v(z) \equiv v_q(z),$$

мұндағы q әртүрлі меншікті функциялар мен меншікті мәндерге сәйкес келетін параметр.

Шекаралық есебті тұйық облыстардағы функциялардың үзіліссіз дифференциалданатын C^1 классикалық кеңістігінде қарастыруға болады. Сондай-ақ, гармониялық $u_q(z)$ функциясы $H^1(D)$ кеңістігіне, ал $v_q(z)$ функциясы $H^1(\mathbb{U})$ кеңістігіне жататын болса, онда (2.18)-(2.19) теңдеулерін

Соболев кеңістігі тұрғысынан да қарастыруға мүмкіндік бар [18], сондай-ақ (2.17) де келтірілген толықтыруға қараңыз.

Т е о р е м а 2.1. Егер $u_q(z) \in H^1(D)$ және $v_q(z) \in H^1(\mathbb{U})$ болса, сонымен қатар, $u_q(z), v_q(z)$ және λ_q сәйкесінше (2.18)-(2.19) теңдеулерінің меншікті функциялары мен меншікті мәні болса, онда $\lambda_q \geq 0$.

Д ә л е л д е у. Гармониялық

$$u_q(z) \in H^1(D) \quad \text{және} \quad v_q(z) \in H^1(\mathbb{U})$$

функциялары үшін Грин формуласын қолдансақ, келесі өрнекке келеміз

$$\int_D \left|\nabla u_q(z)\right|^2 dx = \int_{\partial D} u_q(z) \frac{\partial u(z)}{\partial n} ds$$

$$= \int_{\partial \mathbb{U}} u_q(z) \frac{\partial u(z)}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} u_q(z) \frac{\partial u(z)}{\partial n} ds,$$

мұндағы s – ∂D шекарасына жанама бағыттағы бірлік вектор.

$u_q(z), v_q(z)$ функциялары (2.18)–(2.19) шарттарын қанағаттандыратынын ескерсек, келесі қатынас орындалады

$$\int_D \left|\nabla u_q(z)\right|^2 dx = \int_{\partial \mathbb{U}} u_q(z) \frac{\partial u_q(z)}{\partial n} ds = \lambda_q \int_{\partial \mathbb{U}} v_q(z) \frac{\partial v_q(z)}{\partial n} ds.$$

$v_q(z)$ функциясы үшін Грин формуласын қолдансақ, мына нәтижеге келеміз

$$\int_D \left|\nabla u_q(z)\right|^2 dx = \lambda_q \int_{\mathbb{U}} \left|\nabla v_q(z)\right|^2 dx. \tag{2.20}$$

Егер (2.20)-дегі сол жақтағы интеграл нөлге тең болса, онда

$$v_q(z) = c$$

$\mathbb{U}$-дағ тұрақты, ал

$$u_q(z) = \lambda_q c$$

D -да тұрақты болады. (2.18) теңдеуі $c = 0$ екенін көрсетеді, яғни

$$v_q(z) = 0.$$

Бұл жағдайда меншікті мәндер болмайды.

Егер (2.20) теңдеуіндегі сол жақтағы интеграл нөлге тең, ал оң жақтағы интеграл нөлге тең болмаса, онда осыдан

$$\lambda_q = 0$$

қатынасы шығады. Басқа жағдайларда

$$\int_D \left|\nabla u_q(z)\right|^2 dx > 0,$$

сондықтан $\lambda_q > 0$. Теорема дәлелденді.

Енді (2.18) және (2.19) теңдеулерін $\mathbb{R}$-сызықты есепке келтіреміз. Бұндай есептерді келесі жұмыстардан оқуға болады [29,30,31,32,33,34,35]. Ол үшін D және $\mathbb{U}$ аймақтарында аналитикалық болатын $\varphi_q(z)$ және $\phi_q(z)$ комплекс функцияларын енгіземіз. Гармониялық және аналитикалық функциялар төмендегі теңддеулер мен байланысқан

$$\varphi_q(z) = u_q(z) + i\widetilde{u_q}(z), \;\; z \in D,$$

$$\phi_q(z) = v_q(z) + i\widetilde{v_q}(z), \;\; z \in \mathbb{U},$$

мұндағы $\widetilde{u_q}(z)$ және $\widetilde{v_q}(z)$ – сәйкесінше $\varphi_q(z)$ және $\phi_q(z)$ аналитикалық функцияларының жорамал бөліктері. Олар келесі формулалармен анықталады

$$\widetilde{u_q}(z) = \int_{\tau_1}^{z} -\frac{\partial u_q}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial u_q}{\partial x_1} dx_2, \qquad z \in D,$$

$$\widetilde{v_q}(z) = \int_{\tau_2}^{z} -\frac{\partial v_q}{\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial v_q}{\partial x_1}dx_2, \qquad z \in \mathbb{U}$$

мұндағы τ_1 және τ_2 сәйкесінше D және $\mathbb{U}$-дағы нүктелер. Сонымен қатар, $\varphi_q(z)$ және $\phi_q(z)$ функциялары қарастырылып отырған аймақтардың тұйықталуында үзіліссіз дифференциалданатын деп есептеледі.

Коши-Риман шартын қисық бойымен қолданып, (2.19) теңдеуіндегі екінші теңдеуді келесідей жазуға болады

$$\frac{\partial \widetilde{u_q}(z)}{\partial s} = \frac{\partial \widetilde{v_q}(z)}{\partial s}, \qquad |z| = 1,$$

мұндағы s – ∂D шекарасына жанама бағыттағы бірлік вектор. s параметрі бойынша интегралдау нәтижесінде

$$\widetilde{u_q}(z) = \widetilde{v_q}(z), \qquad |z| = 1.$$

Осылайша, (2.18) және (2.19) шарттарынан $\mathbb{R}$-сызықтық шартқа келеміз

$$Re\varphi_q(z) = 0, \qquad z \in \Gamma, \tag{2.21}$$

$$\varphi_q(z) = \frac{\lambda_q + 1}{2}\phi_q(z) + \frac{\lambda_q - 1}{2}\overline{\phi_q(z)}, \qquad |z| = 1. \tag{2.22}$$

Белгісіз $\varphi_q(z)$, $\phi_q(z)$ функциялары сәйкесінше D және $\mathbb{U}$-да аналитикалық, ал ∂D және $\partial\mathbb{U}$-да үзіліссіз болып табылады. Сонымен қатар, $\varphi_q(z)$, $\phi_q(z)$ және λ_q– (2.21) және (2.22) $\mathbb{R}$-сызықтық есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері деп аталады. (2.22) байланысы келесі түрде жазылады

$$\varphi_q(z) = \frac{\lambda_q - 1}{2}\beta_q(z) + \frac{\lambda_q + 1}{2}\overline{\beta_q(z)}, \qquad |z| = 1, \tag{2.23}$$

мұндағы

$$\beta_q(z) = \overline{\phi_q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

$|\ z\ |>1$-де аналитикалық функция, ал

$$\beta_q(\infty) = 0.$$

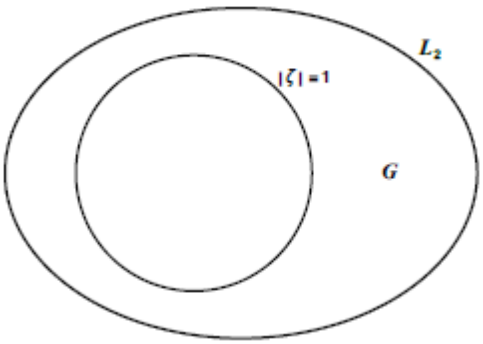
Бұдан

$$u_q(z) = \lambda_q \vartheta_q(z), \qquad \frac{\partial u_q(z)}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta_q(z)}{\partial n}, \qquad |z| = 1,$$

мұндағы

$$\vartheta_q(z) = Re\varphi_q(z)$$

$|\ z\ |>1$-де гармониялық функция.
$z = \alpha(\zeta)$ – $|\ \zeta\ |<1|$ бірлік дөңгелекті D_0-ға конформды түрде кескіндейтін түрлендіру болсын. $|\ \zeta\ |=1$ шеңбері Γ-ға, ал L_2 қисығы $|\ z\ |=1$ -ге сәйкес келеді. Қос байланысқан G және G_2 облыстары $\alpha(\zeta)$ түрлендіруімен сәйкесінше D және $|\ z\ |>1|$-ге түрленеді (Сурет-2).



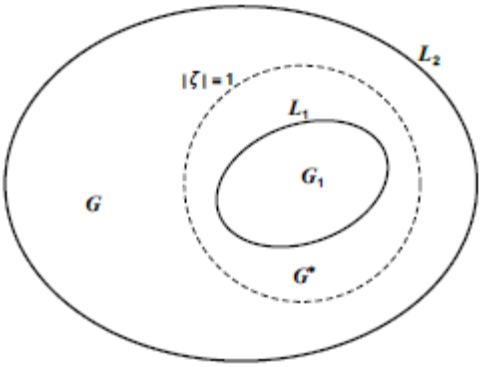
Сурет-2

$$\varphi_q(z) = \varphi_q[\alpha(\zeta)] = \psi_q(\zeta)$$

G -де аналитикалық және оның тұйықталуында үзіліссіз дифференциалданатын функция. Конформды түрлендіруді қолдану арқылы (2.21) және (2.23) есептері келесі спектрлік $\mathbb{R}$-сызықтық есепке айналады

$$Re\psi_q(\zeta) = 0, |\ \zeta\ |= 1, \tag{2.24}$$

$$\psi_q(\zeta) = \frac{\lambda_q - 1}{2}\omega_q(\zeta) + \frac{\lambda_q + 1}{2}\overline{\omega_q(\zeta)}, \qquad \zeta \in L_2, \tag{2.25}$$



Сурет-3

Бірлік шеңберге қатысты $\zeta \to \frac{1}{\bar{\zeta}}$ инверсиясын қолданып, G_2 және L_2-ден G_1 және L_1-ді аламыз (Сурет-3).

L_1 және L_2 қисықтары сағат тіліне қарсы бағытталанған болсын. G_1, G_2 және G^+ ашық облыстарының шекаралары келесі қатынастармен беріледі

$$\partial G_1 = L_1, \qquad \partial G_2 = -L_2, \qquad \partial G^+ = L_2 \cup (-L_1) = L.$$

Сондықтан $G^- = G_1 \cup G_2$.

$$w_q(\zeta) = \overline{\psi_q\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}$$

функциясын енгізейік, ол G_1-де аналитикалық және келесі шартты қанағаттандырады

$$\psi_q(\zeta) = \frac{\lambda_q - 1}{2} w_q(\zeta) + \frac{\lambda_q + 1}{2} \overline{w_q(\zeta)}, \qquad \zeta \in L_1, \tag{2.26}$$

Жаңа белгісіз аналитикалық функцияларды енгізейік

$$\psi_q^+(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi_q(\zeta), \qquad \psi_q^-(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \zeta} w_q(\zeta), & for\ \zeta \in G_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \omega_q(\zeta), & for\ \zeta \in G_2 \end{cases}. \tag{2.27}$$

(2.27) анықтамасына және ∂G^+-ға қатысты жасалған болжамдарға сәйкес, $\psi_q^+(\zeta)$ және $\psi_q^-(\zeta)$ сәйкесінше $G^+ + L$ және $G^- + L$-де үзіліссіз.

Т е о р е м а 2.2. $\psi_q^+(\zeta)$ және $\psi_q^-(\zeta)$\$ функциялары (2.24)-(2.26) теңдеулерінің аналитикалық меншікті функциялары болсын және олар (2.27) арқылы анықталсын. Онда кез келген әртүрлі меншікті функцияларының жұптары $\psi_\nu^+(\zeta)$, $\psi_\mu^+(\zeta)$ (немесе $\psi_\nu^-(\zeta)$, $\psi_\mu^-(\zeta)$) өзара ортогональды болады

$$\iint_{G^+} \psi_\nu^+(\zeta)\overline{\psi_\mu^+(\zeta)}d\tau_\zeta = 0, \qquad \iint_{G^-} \psi_\nu^-(\zeta)\overline{\psi_\mu^-(\zeta)}d\tau_\zeta = 0, \qquad for \quad \nu \neq \mu. \quad (2.28)$$

Д ә л е л д е у. L контурының доға ұзындығы l арқылы анықталатын

$$\zeta = x_1(l) + ix_2(l)$$

параметрлік өрнегін қолданамыз және

$$\zeta' = d\zeta/dl,$$

L -ң жанамасы бағытына сәйкес $\zeta(l)$-дағы бірлік векторды енгіземіз. Осылайша, (2.25) және (2.26) теңдеулерін келесі түрде жаза аламыз

$$\psi_q^+(\zeta)\zeta' = \frac{\lambda_q - 1}{2}\psi_q^-(\zeta)\zeta' + \frac{\lambda_q + 1}{2}\overline{\psi_q^-(\zeta)\zeta'}, \qquad (2.28)$$

(2.28) өрнегін Коши теңдігіне енгіземіз. Осыдан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi_q^+(\zeta)}{\zeta - \xi}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\psi_q^+(\zeta)}{\zeta - \xi}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\psi_q^+(\zeta)}{\zeta - \xi}d\zeta$$

$$= \frac{\lambda_q - 1}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{\psi_q^-(\zeta)}{\zeta - \xi}d\zeta + \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi}$$

$$- \frac{\lambda_q - 1}{4\pi i}\int_{L_1} \frac{\psi_q^-(\zeta)}{\zeta - \xi}d\zeta - \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i}\int_{L_1} \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi}.$$

(2.28) өрнегіне түйіндес комплекс өрнегін қолдану нәтижесінде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi}$$

$$= \frac{\lambda_q - 1}{4\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} + \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{\psi_q^-(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta$$

$$- \frac{\lambda_q - 1}{4\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} - \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\psi_q^-(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta.$$

$\xi \in G^+$ болғанда

$$\psi_q^+(\xi) = \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} \quad \text{және} \quad \psi_q^+(\xi) = \frac{1 + \lambda_q}{1 - \lambda_q} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi}. \quad (2.29)$$

Дәл осы әдіспен $\xi \in G^-$ үшін келесіні аламыз

$$\psi_q^-(\xi) = \frac{1}{\lambda_q} \frac{\lambda_q + 1}{4\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi} \quad \text{және} \quad \psi_q^-(\xi) = \frac{1 + \lambda_q}{1 - \lambda_q} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)d\zeta}}{\zeta - \xi}. \quad (2.30)$$

Формулаларда L қисық сызығының оң бағыты ретінде G^+ аймағы сол жақта қалатындай бағыт қабылданады.

Сызықтық интегралдар (2.29) және (2.30) аудан бойынша интегралдарға түрлендіріліп, интегралдық теңдеулер келесі түрде болады

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G^+} \frac{\overline{\psi_q^+(\zeta)}}{(\zeta - \xi)^2} d\tau_\zeta = \begin{cases} \frac{1 - \lambda_q}{1 + \lambda_q} \psi_q^+(\xi), & for\ \xi \in G^+, \\ \frac{2\lambda_q}{1 + \lambda_q} \psi_q^-(\xi), & for\ \xi \in G^- \end{cases} \quad (2.31)$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{G^-} \frac{\overline{\psi_q^-(\zeta)}}{(\zeta - \xi)^2} d\tau_\zeta = \begin{cases} \frac{2_q}{1 + \lambda_q} \psi_q^+(\xi), & for\ \xi \in G^+, \\ \frac{1 - \lambda_q}{1 + \lambda_q} \psi_q^-(\xi), & for\ \xi \in G^-. \end{cases} \quad (2.32)$$

Бұл екі интегралда $d\tau_\zeta$ айнымалы ζ бойынша аудан элементін білдіреді.

Интегралдық теңдеулер (2.31) және (2.32) Фредгольмның меншікті функциялары теориясы мен аналитикалық функциялардың Гильберт түрлендірулері арасындағы тығыз байланысты көрсетеді

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-\xi)^2}\, d\tau_\zeta.$$

Бұл түрлендіру комплекс жазықтықта D -да анықталған $f(\zeta)$ функциясы $L_2(D)$-интегралданатын функциясын дәл сол классқа және дәл сол нормамен жаңа $F(\xi)$ функцияға түрлендіреді

$$\iint\limits_{D} |F(\xi)|^2 d\tau_\zeta = \iint\limits_{D} |f(\xi)|^2 d\tau_\zeta.$$

G^+ облысының және G^- – жиынының Грин функцияларын енгіземіз. G^+облысының Грин функциясы $g(\zeta,\xi)$ әдеттегідей анықталса, G^-– облысының Грин функциясы $\tilde{g}(\zeta,\xi)$ келесі теңдеу арқылы беріледі

$$\tilde{g}(\zeta,\xi) = \begin{cases} \widetilde{g_j}(\zeta,\xi), for\ \ \zeta,\xi \in G_j, j = 1,2., \\ 0,\ \ for\ \ \zeta \in G_j, \xi \in G_l, j \neq l, l = 1,2, \end{cases}$$

мұнда $\tilde{g}$ функциясы G_j облысының Грин функциясы. Күрделі дифференциалдау әдісін қолданып, $g(\zeta,\xi)$ функциясынан келесі аналитикалық функцияны аламыз

$$K(\zeta,\xi) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\xi} g(\zeta,\xi) = \frac{1}{\pi(\zeta-\xi)^2} - k(\zeta,\xi).$$

$K(\zeta,\xi)$ және $k(\zeta,\xi)$ ядролар G^- облысы жағдайында белгілі [19,20,28]. Шынында, егер $\xi \in G_j$ болса, онда $\zeta \in G_j$ үшін

$$k(\zeta,\xi) = k_j(\zeta,\xi)$$

және $\zeta \in G_l,\ j \neq l$ үшін

$$k(\zeta,\xi) = \frac{1}{\pi(\zeta-\xi)^2}.$$

Атап айтқанда, (2.31) және (2.32) интегралдық теңдеулерін $\psi_q^+(\zeta)$ және $\psi_q^-(\zeta)$ үшін келесі түрде жазуға болады

$$\iint\limits_{G^+} k(\zeta,\xi)\overline{\psi_q^+(\zeta)}d\tau_\zeta = -\lambda\psi_q^+(\xi), \qquad for \;\; \xi \in G^+,$$

$$\iint\limits_{G^+} \tilde{k}(\zeta,\xi)\overline{\psi_q^-(\zeta)}d\tau_\zeta = \lambda\psi_q^-(\xi), \qquad for \;\; \xi \in G^-.$$

$k(\zeta,\xi)$ және $\tilde{k}(\zeta,\xi)$ ядролар симметриясына сүйене отырып, келесі тұжырым жасай аламыз

$$\iint\limits_{G^+} \psi_\nu^+(\zeta)\overline{\psi_\mu^+(\zeta)}d\tau_\zeta = 0, \qquad \iint\limits_{G^-} \psi_\nu^-(\zeta)\overline{\psi_\mu^-(\zeta)}d\tau_\zeta = 0, \qquad \lambda_\nu \neq \lambda_\mu.$$

Осылайша, интегралдық теңдеулер теориясындағы таныс дәлелдерге сүйене отырып, кез келген екі әртүрлі меншікті функциялар ψ_ν^+, ψ_μ^+ (ψ_ν^-, ψ_μ^-) бір-біріне ортогональ деп есептей аламыз. Осылайша, дәлелдеме аяқталды.

3 ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ КАРЛЕМАН ЫҒЫСУЫ БАР СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

$Г$ тұйық Ляпунов контуры болсын. Келесі

$$S_Г\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_Г \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

сингуляр операторының Бесов $B^r_{p,\theta}(Г)$ кеңістіктеріндегі келесі жағдайлар үшін

а) $1<p<2,\ r=\frac{1}{p},\ \theta=1,$

б) $1<p<2,\ r>\frac{1}{p},\ \theta\geq 1,$

с) $p\geq 2,\ r>1-\frac{1}{p},\ \theta\geq 1,$

шенелгендігі мен қасиеттері дәлелденген [2, 61-бет].

Келесі теоремада біз p, r және θ параметрлерінің қойылған бұл шарттарды алып тастадық.

Т е о р е м а 3.1 $p>1,\ r>0,\ \theta\geq 1$ болсын, ал $Г\in C^{m,\nu}$ қарапайым тұйық контур болсын, мұндағы $m\geq 1-$ бүтін сан, $0<\nu\leq 1$, сондай-ақ

$$m-1+\nu>r.$$

Онда $S_Г$ сингуляр интеграл операторы $B^r_{p,\theta}(Г)$ кеңістігінде шенелген.

Д ә л е л д е у. Жазуды ыңғайлы ету үшін келесі белгілерді енгіземіз

$$\tau=t(s_1),\tau_h=t(s_1+h)\,,t=t(s),t_h=t(s+h)\,,\tau'=t'(s_1),\tau'_h=t'(s_1+h).$$

Демек

$$S_Г\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\frac{\tau'}{\tau-t}ds_1,$$

$$S_Г\varphi(t_h)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t_h}d\tau=\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau_h)\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_h}ds_1.$$

Е с к е р т у. Мұнда және бұдан әрі сингуляр интегралдар параметрлік түрде $[0, l]$ кесіндісінің шеткі нүктелерінде шек ретінде түсіндіріледі.

$$\lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta}^{l-\delta} \varphi(\tau)\frac{\tau'}{\tau - t(0)}\,ds_1 \quad \text{және} \quad \lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta}^{l-\delta} \varphi(\tau)\frac{\tau'}{\tau - t(l)}\,ds_1.$$

Онда

$$\Delta_h(s)\big(S_\Gamma\varphi(t)\big) = S_\Gamma\varphi(t_h) - S_\Gamma\varphi(t)$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h}\,ds_1$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\left(\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} - \frac{\tau'}{\tau - t}\right)ds_1. \qquad (3.1)$$

Енді, екінші қосылғышты қарастырайық

$$(M\varphi)(s) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\left(\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} - \frac{\tau'}{\tau - t}\right)ds_1. \qquad (3.2)$$

Айнымалыны $s_1 = s_2 + s$ деп ауыстырып, соңғы интегралда,

$$t(s) = x(s) + iy(s),$$

функциясының l периодтылығын ескере отырып, аламыз

$$(M\varphi)(s) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi i}\int_{-s}^{l-s} \varphi\big(t(s_2+s)\big)\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h) - t(s+h)} - \frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s) - t(s)}\right)ds_2$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varphi\big(t(s_2+s)\big)\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h) - t(s+h)} - \frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s) - t(s)}\right)ds_2.$$

Бұл интегралдың ядросы үшін келесі бағалаулар орындалады

$$\left|\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right|\le c_1(\Gamma)\frac{1}{|s_2|^{1-\nu}}\,, \qquad (3.3)$$

$$\left|\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right|\le c_2(\Gamma)\frac{|h|^{\nu}}{|s_2|}, \qquad (3.4)$$

мұндағы $c_1(\Gamma)$и және $c_2(\Gamma)$ оң тұрақтылар, олар $s, s_2 \neq 0$ айнымалыларынан тәуелсіз, және h параметрі $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ интервалда жатыр. Шынында да,

$$\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}=$$

$$=\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}$$

$$=\frac{\int_0^1(t'\,(s_2+s+h)-t'\,(\sigma s_2+s+h))d\sigma}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}$$

$$-\frac{\int_0^1\left(t'\,(s_2+s)-t'\,(\sigma s_2+s)\right)d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}.$$

Осыдан, $t'\in H_{\nu}$, болуына байланысты (3.3) шығады, соңғы теңдікті түрлендіре отырып, келесі нәтижені аламыз

$$\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}=$$

$$=\left(\frac{1}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{1}{t(s_2+s)-t(s)}\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^1\left(t'\,(s_2+s+h)-t'\,(\sigma s_2+s+h)\right)d\sigma\right)$$

$$+\frac{\int_0^1(t'\ (s_2+s+h)-t'\ (\sigma s_2+s+h))d\sigma-\int_0^1(t'\ (s_2+s)-t'\ (\sigma s_2+s))d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}$$

$$=\left(\frac{t(s_2+s)-t(s)-t(s_2+s+h)+t(s+h)}{\big(t(s_2+s+h)-t(s+h)\big)\big(t(s_2+s)-t(s)\big)}\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^1\Big(t'\ (s_2+s+h)-t'\ (\sigma s_2+s+h)\Big)d\sigma\right)$$

$$+\frac{\int_0^1(t'\ (s_2+s+h)-t'\ (s_2+s))d\sigma-\int_0^1(t'\ (\sigma s_2+s+h)-t'\ (\sigma s_2+s))d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}$$

$$=\left(\frac{s_2\int_0^1\big(t'(\sigma s_2+s)-t'(\sigma s_2+s+h)\big)d\sigma}{\big(t(s_2+s+h)-t(s+h)\big)\big(t(s_2+s)-t(s)\big)}\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^1\Big(t'\ (s_2+s+h)-t'\ (\sigma s_2+s+h)\Big)d\sigma\right)$$

$$+\frac{\int_0^1(t'\ (s_2+s+h)-t'\ (s_2+s))d\sigma-\int_0^1(t'\ (\sigma s_2+s+h)-t'\ (\sigma s_2+s))d\sigma}{t(s_2+s)-t(s)}.$$

Осыдан, $t'\in H_\nu$, ескерілсе, (3.4) шығады. Енді (3.3) және (3.4) қатынастарын пайдаланып, (3.2) интегралын жоғарыдан бағалайық

$$|(M\varphi)(s)|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi i}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\varphi\big(t(s_2+s)\big)\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right)ds_2\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{\pi i}\int_{-|h|}^{|h|}\varphi\big(t(s_2+s)\big)\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right)ds_2\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\pi i}\int_{s_2:\,|h|<|s_2|\le\frac{l}{2}} \varphi\big(t(s_2+s)\big)\left(\frac{t'(s_2+s+h)}{t(s_2+s+h)-t(s+h)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{t'(s_2+s)}{t(s_2+s)-t(s)}\right)ds_2\right|$$

$$\le\frac{c_1(\Gamma)}{\pi}\int_{-|h|}^{|h|}\big|\varphi\big(t(s_2+s)\big)\big|\frac{1}{|s_2|^{1-\nu}}ds_2$$
$$+|h|^{\nu}\frac{c_2(\Gamma)}{\pi}\int_{s_2:\,|h|<|s_2|\le\frac{l}{2}}\big|\varphi\big(t(s_2+s)\big)\big|\frac{1}{|s_2|}ds_2.$$

Осыдан, Минковскийдің жалпы түрдегі теңсіздігін пайдаланып, $|(M\varphi)(s)|$ функциясының нормасы үшін келесі нәтиже аламыз

$$\|M\varphi\|_{L_p(\Gamma)}\equiv\|M\varphi(t(\cdot)\|_{L_p[0,l]}\le c_3(\Gamma)\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}|h|^{\nu}$$
$$+c_4(\Gamma)\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}|h|^{\nu}|ln\,|h||\le c_5(\Gamma)\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}|h|^{\nu}|ln|h||. \qquad (3.5)$$

Сонымен қатар, L_p $(p>1)$ кеңістігінде сингуляр интеграл оператордың шенелгендігіне байланысты, (3.1) өрнегіндегі бірінші қосылғыш үшін келесі нәтижені аламыз

$$\left(\int_0^l\left|\int_0^l\Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)\frac{\tau_h'}{\tau_h-t_h}ds_1\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\le c_6(p,\Gamma)\big\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(\tau)\big)\big\|_{L_p[0,l]}.$$

Сонымен, (3.1), (3.2) және (3.5) теңдеулерін ескере отырып, келесі нәтижені аламыз

$$\big\|\Delta_h(\cdot)\big(S_\Gamma\varphi(t)\big)\big\|_{L_p[0,l]}\le$$

$$\le\frac{C_6(p,\Gamma)}{\pi}\big\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(\tau)\big)\big\|_{L_p[0,l]}+c_5(\Gamma)\big\|\varphi\big(t(\cdot)\big)\big\|_{L_p[0,l]}\cdot|h|^{\nu}|ln|h||.$$

Осылайша, Бесов жартынормасын ескере отырып және $r<\nu$ шартын қанағаттандыра отырып, келесі нәтижені аламыз

$$\|S_\Gamma\varphi(t)\|_{b^r_{p,\theta}[0,l]} \equiv \left(\int_{-h_0}^{h_0} |h|^{-1-r\theta} \left\|\Delta_h(\cdot)\left(S_\Gamma\varphi(t)\right)\right\|^{\theta}_{L_p([0,l])} dh\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq c_7(p,\theta,\Gamma)\|\varphi(t)\|_{b^r_{p,\theta}[0,l]} + c_8(p,\theta,\Gamma)\left\|\varphi\left(t(\cdot)\right)\right\|_{L_p[0,l]}.$$

Нәтижесінде, осындай қорытындылардан және жоғарыда айтылған $S_\Gamma\varphi(t)$ операторының $L_p(\Gamma)$ $(p>1)$ кеңістігінде шенелгендігіне байланысты оңай келесі нәтиже алынады

$$\|S_\Gamma\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}[0,l]} \equiv \|S_\Gamma\varphi(t)\|_{L_p[0,l]} + \|S_\Gamma\varphi(t)\|_{b^r_{p,\theta}[0,l]}$$

$$\leq c_9(p,\theta,\Gamma)\|\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}[0,l]},$$

мұндағы

$$c_9(p,\theta,\Gamma) = max\{c_7(p,\theta,\Gamma); c_8(p,\theta,\Gamma) + \|S_\Gamma\|_{p\to p}\}.$$

Т е о р е м а 3.1 дәлелденді.

Т е о р е м а 3.2 $0<\nu\leq 1$, $\Gamma\in C^{1,m}$ – қарапайым тұйық контур болсын,

$$\alpha(t)\colon \Gamma\to\Gamma$$

Γ-ның тікелей немесе кері ығысуы, сондай-ақ оның туындысы $\alpha'(t)$ Гёльдер $H_\mu(\Gamma)$ кеңістігіне тиісті болсын, мұндағы $0<\mu\leq 1$ және кез келген $t\in\Gamma$ үшін

$$\alpha'(t)\neq 0.$$

Онда кез келген

$$p>1, \qquad \theta\geq 1, \qquad 0<r<min\{\mu,\nu\}$$

үшін ығысу

$$(W_\alpha\varphi)(t) = \varphi\left(\alpha(t)\right)$$

операторы $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ кеңістігінде шенелген болады.

Д ә л е л д е у.

$$t(s) = x(s) + iy(s), \qquad 0 \le s \le l,$$

қарапайым Γ тұйық контурдың теңдеуі болсын, мұндағы l оның ұзындығы, ал $x(s), y(s)$ функциялар ұзындығы l бойынша периодты түрде жалғасқан. Себебі

$$\alpha(t): \Gamma \to \Gamma$$

контурды өзіне гомеоморфизм ретінде бейнелейді, онда

$$t_1(s) \equiv \alpha\big(t(s)\big): [0, l] \to \Gamma$$

функция параметрлік түрде жазылған Γ қисығының теңдеуі болып табылады.

Осыдан,

$$\theta(s): R \to R$$

функциясы бар екенін білеміз, ол кез келген ұзындығы l -ге тең кесіндіні басқа ұзындығы l -ге тең кесіндіге аударады және

$$t_1(s) \equiv \alpha\big(t(s)\big) = t\big(\theta(s)\big)$$

теңдігі орындалады ($\theta(s)$ өсетін немесе кемитін болады, себебі $\alpha(t)$ тікелей немесе кері ығысу болып табылады).

Теоремаға сәйкес, дифференциалдық қасиеттері бойынша, $\theta(s)$ дифференциалданатын функция болып табылады және

$$\theta'(s) = \frac{\alpha'\big(t(s)\big)t'(s)}{t'\big(\theta(s)\big)}.$$

Себебі

$$|t'(s)| = 1,$$

онда біріншіден, $\theta(s) \in \mathrm{C}^1_{\nu_1}$, мұндағы $\nu_1 = min\{\mu, \nu\}$, екіншіден

$$|\theta'(s)| = \big|\alpha'\big(t(s)\big)\big| \neq 0.$$

$\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ болсын. Бұл $\psi(s) \equiv \varphi(t(s))$ функциясының Бесов кеңістігіне $B^r_{p,\theta}([0,l])$ тиесілі екенін білдіреді, мұнда $\psi(s)$ нақты айнымалының l-периодты функция. Осыған сәйкес келетін функцияны қарастырайық

$$(W_\alpha\varphi)(t(s)) = \varphi\big(\alpha(t(s))\big) = \varphi\big(t(\theta(s))\big) = \psi\big(\theta(s)\big).$$

Осыдан, жоғарыда дәлелденген $\theta(s)$ функциясының қасиеттері мен Бесов кеңістіктеріндегі айнымалыны ауыстыру туралы теореманы (қараңыз [16]) ескере отырып, $\psi\big(\theta(s)\big)$ функциясы да $B^r_{p,\theta}([0,l])$ кеңістігіне тиесілі екенін көреміз. Сонымен қатар, нормалар үшін келесі қатынас орындалады

$$\big\|\psi\big(\theta(\cdot)\big)\big\|_{B^r_{p,\theta}([0,l])} \le k \cdot \|\psi(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}([0,l])},$$

мұндағы $k - \varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ функциясынан тәуелсіз оң тұрақты шама. Бұл W_α ығысу операторының $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ кеңістігінде шенелгендігін білдіреді. Т е о р е м а 3.2 дәлелденді.

С а л д а р 3.1 Егер Т е о р е м а 3.2 шарттары орындалса, онда ығысуы бар сингуляр интеграл оператор

$$\big(S_{\Gamma,\alpha}\varphi\big)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(t)}$$

$B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ кеңістігінде шенелген.

Т е о р е м а 3.3 $0 < \nu \le 1$, $\Gamma \in \mathrm{C}^1_\nu$ қарапайым тұйық контур болсын. Онда кез келген $p > 1,\ \theta \ge 1,\ 0 < r < \nu$ үшін, егер $\varphi(t) \in B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, келесі қатынас орындалады:

$$\|C\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)} = \|\varphi(t)\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}.$$

(яғни, $C\varphi(t) \equiv \overline{\varphi(t)}$ комплекс түйіндес операторы $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ кеңістігінде шенелген). Бұл тұжырымның дұрыстығы айқын.

Т е о р е м а 3.4 $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < r < min\{\mu, \nu\}$ болсын. Онда

$$\mathcal{A}_1 = \gamma W_\alpha S {W_\alpha}^{-1} - S$$

операторы $B_{p,\theta}^{r}(\Gamma)$ кеңістігінде толық үзіліссіз, мұнда $\gamma = +1$ немесе $\gamma = -1$ сәйкесінше $\alpha(t)$ тікелей немесе кері ығысу болып табылады.

Д ә л е л д е у.

$$t(s) = x(s) + iy(s), \qquad 0 \le s \le l,$$

ұзындығы l -ге тең Γ қарапайым тұйық контурдың теңдеуі болсын (яғни, s доғаның параметрі болып табылады), мұндағы $x(s)$ және $y(s)$ функциялары l - периодты түрде барлық нақты оське жалғасады.

$$\mathcal{A}_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)K_1(\tau,t)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(t(s_1))K_1(t(s_1),t(s))t'(s_1)ds_1,$$

мұндағы $\alpha(t)$ тікелей ығысу жағдайында да, кері ығысу жағдайында да болады

$$K_1(\tau,t) \equiv K_1(s_1,s) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}$$

$$= \frac{\alpha'(t(s_1))}{\alpha(t(s_1))-\alpha(t(s))} - \frac{1}{t(s_1)-t(s)}. \qquad (3.6)$$

Әрі қарай,

$$\mathcal{A}_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)K_1(\tau,t)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)K_1(\tau,t)\tau' ds_1,$$

$$\mathcal{A}_1\varphi(t_h) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)K_1(\tau,t_h)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau_h)K_1(\tau_h,t_h)\tau_h{}' ds_1,$$

$$\mathcal{A}_1\varphi(t_{2h}) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)K_1(\tau,t_{2h})d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau_h)K_1(\tau_h,t_{2h})\tau'_h ds_1$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau_{2h})K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau'_{2h} ds_1.$$

осыдан,

$$\mathcal{A}_1\varphi(t_h) - \mathcal{A}_1\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h, t_h)\tau_h' ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_h, t_h)\tau_h' - K_1(\tau, t)\tau')ds_1$$

және

$$\mathcal{A}_1\varphi(t_{2h}) - \mathcal{A}_1\varphi(t_h) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h, t_{2h})\tau_h' ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_h, t_{2h})\tau_h' - K_1(\tau, t_h)\tau')ds_1$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h, t_{2h})\tau_h' ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau_h)(K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h, t_h)\tau_h')ds_1$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))K_1(\tau_h, t_{2h})\tau_h' ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h, t_h)\tau_h')ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_{2h}, t_{2h})\tau_{2h}' - K_1(\tau_h, t_h)\tau_h')ds_1.$$

Бұл теңдеулерден екінші ретті айырымның келесі қасиеті шығады

$$\Delta_h^2(s)\big(\mathcal{A}_1\varphi(t)\big) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)(K_1(\tau_h, t_{2h}) - K_1(\tau_h, t_h))\tau_h' ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau'_{2h}-K_1(\tau_h,t_h)\tau'_h)ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)(K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau'_{2h}-2K_1(\tau_h,t_h)\tau'_h+K_1(\tau,t)\tau')ds_1$$

$$\equiv I_1\varphi(s)+I_2\varphi(s)+I_3\varphi(s). \qquad (3.7)$$

Бірінші $I_1(\varphi)$ қосылғыштың ядросын бағалаймыз. (3.6) анықтамасын ескере отырып, мынаны аламыз

$$(K_1(\tau_h,t_{2h})-K_1(\tau_h,t_h))\tau'_h=\left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau'_h}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_{2h})}-\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_{2h}}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau'_h}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_h)}-\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_h}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha'(\tau_h)\tau'_h}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_{2h})}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\alpha'(\tau_h)\tau'_h}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_h)}\right)$$

$$-\left(\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_{2h}}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_h}\right).$$

Соңғы жақшалардағы өрнекті түрлендірсек, келесі нәтижені аламыз

$$\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_{2h}}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_h}=$$

$$=\frac{\int_{-1}^0(t'\ (s_1+h)-t'\ (s_1+h+\sigma(s_1-s-h))d\sigma}{\tau_h-t_{2h}}$$

$$-\frac{\int_{-1}^0(t'\ (s_1+h)-t'\ \big(s_1+h+\sigma(s_1-s)\big)d\sigma}{\tau_h-t_h}.$$

Осыдан, мынадай қорытынды шығады

$$\left|\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_{2h}}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\tau'_h}{\tau_h-t_h}\right|\leq$$

$$\leq M_1(\Gamma)\left(\frac{1}{|s_1-s|^{1-\nu}}+\frac{1}{|s_1-s-h|^{1-\nu}}\right). \quad (3.8)$$

(1.8) теңдеуді әрі қарай түрлендіре отырып, аламыз

$$\frac{\tau_h'}{\tau_h-t_h}-\frac{1}{s_1-s}+\frac{1}{s_1-s-h}-\frac{\tau_h'}{\tau_h-t_{2h}}=$$

$$=\frac{\int_{-1}^{0}(t'\ (s_1+h)-t'\ \big(s_1+h+\sigma(s_1-s)\big)d\sigma}{\tau_h-t_h}$$

$$-\frac{\int_{-1}^{0}(t'\ (s_1+h)-t'\ \big(s_1+h+\sigma(s_1-s-h)\big)d\sigma}{\tau_h-t_h}$$

$$+\left(\frac{1}{\tau_h-t_h}-\frac{1}{\tau_h-t_{2h}}\right)\int_{-1}^{0}(t'\ (s_1+h)-t'\ (s_1+h+\sigma(s_1-s-h))d\sigma$$

$$=\frac{\int_{-1}^{0}(t'\ (s_1+h+\sigma(s_1-s-h))-t'\ \big(s_1+h+\sigma(s_1-s)\big)d\sigma}{\tau_h-t_h}$$

$$+\left(\frac{t_h-t_{2h}}{(\tau_h-t_h)(\tau_h-t_{2h})}\right)\int_{-1}^{0}(t'\ (s_1+h)-t'\ (s_1+h+\sigma(s_1-s-h))d\sigma.$$

Әрі қарай,

$$\left|\frac{\tau_h'}{\tau_h-t_h}-\frac{1}{s_1-s}+\frac{1}{s_1-s-h}-\frac{\tau_h'}{\tau_h-t_{2h}}\right|\leq$$

$$\leq M_2(\Gamma)\left(\frac{|h|^{\nu}}{|s_1-s|}+\frac{|h|}{|s_1-s||s_1-s-h|^{1-\nu}}\right). \quad (3.9)$$

Келесі теңсіздіктер (3.8) және (3.9) ұқсас түрде дәлелденеді

$$\left|\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_{2h})}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_h)}\right|\le$$

$$\le M_3(\Gamma)\left(\frac{1}{|s_1-s|^{1-\nu_1}}+\frac{1}{|s_1-s-h|^{1-\nu_1}}\right),$$

$$\left|\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_{2h})}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\alpha'(\tau_h)\tau_h'}{\alpha(\tau_h)-\alpha(t_h)}\right|\le$$

$$\le M_4(\Gamma)\left(\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1-s|}+\frac{|h|}{|s_1-s||s_1-s-h|^{1-\nu_1}}\right), (3.10)$$

мұндағы

$$\nu_1=min\{\mu,\nu\}.$$

(3.7) өрнегіндегі екінші және үшінші интегралды ядролар үшін қатынастарды оңай дәлелдеуге болады

$$|K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}'-K_1(\tau_h,t_h)\tau_h'|\le M_5(\Gamma)\frac{1}{|s_1-s|^{1-\nu_1}},$$

$$|K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}'-K_1(\tau_h,t_h)\tau_h'|\le M_6(\Gamma)\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1-s|}, \quad (3.11)$$

және

$$|K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}'-2K_1(\tau_h,t_h)\tau_h'+K_1(\tau,t)\tau'|\le M_5(\Gamma)\frac{1}{|s_1-s|^{1-\nu_1}},$$

$$|K_1(\tau_{2h},t_{2h})\tau_{2h}'-2K_1(\tau_h,t_h)\tau_h'+K_1(\tau,t)\tau'|\le M_6(\Gamma)\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1-s|}, \quad (3.12)$$

(3.7)-дегі бірінші қосылғыш үшін (3.9)-(3.10) және $t(s_1)$-дің l −периодтылығы ескере отырып, мынаны аламыз

$$|I_1\varphi(s)|=\left|\frac{1}{\pi i}\int_0^l\Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)(K_1(\tau_h,t_{2h})-K_1(\tau_h,t_h))\tau_h'ds_1\right|$$

$$= \left| \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{l}{2}+s}^{\frac{l}{2}+s} \Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)(K_1(\tau_h, t_{2h}) - K_1(\tau_h, t_h))\tau_h' ds_1 \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{l}{2}+s}^{\frac{l}{2}+s} \left|\Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)\right| |(K_1(\tau_h, t_{2h}) - K_1(\tau_h, t_h))\tau_h'| ds_1$$

$$\leq \frac{M_7(\Gamma)}{\pi} \int_{s_1:|s_1-s|\leq 2|h|} \left|\Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)\right| \left(\frac{1}{|s_1 - s|^{1-\nu_1}} + \frac{1}{|s_1 - s - h|^{1-\nu_1}}\right) ds_1$$

$$+ \frac{M_7(\Gamma)}{\pi} \int\limits_{\substack{s_1 \in \left[-\frac{l}{2}+s, \frac{l}{2}+s\right]: \\ |s_1-s|>2|h|}} \left|\Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)\right| \left(\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_1 - s|} + \frac{|h|}{|s_1 - s||s_1 - s - h|^{1-\nu_1}}\right) ds_1$$

$s_2 = s_1 - s$ алмастыруын енгізіп, әрі қарай жалғастырамыз

$$\leq \frac{M_7(\Gamma)}{\pi} \int_{s_2:|s_2|\leq 2|h|} \left|\Delta_h(s_2 + s)\big(\varphi(t)\big)\right| \left(\frac{1}{|s_2|^{1-\nu_1}} + \frac{1}{|s_2 - h|^{1-\nu_1}}\right) ds_2$$

$$+ \frac{M_7(\Gamma)}{\pi} \int_{\substack{s_2 \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]: \\ |s_2|>2|h|}} \left|\Delta_h(s_2 + s)\big(\varphi(t)\big)\right| \left(\frac{|h|^{\nu_1}}{|s_2|} + \frac{|h|}{|s_2||s_2 - h|^{1-\nu_1}}\right) ds_2.$$

Осыдан $\|I_1\varphi\|_{L_p[0,l]}$ нормасы үшін Минковскийдің жалпыланған теңсіздігін қолдана отырып келесі теңдеуді аламыз

$$\|I_1\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_8(\Gamma) \cdot |h|^{\nu_1} \cdot |log|h|| \cdot \left\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(t)\big)\right\|_{L_p[0,l]}. \quad (3.13)$$

(3.11) және (3.12) бағалауларын ескере отырып және ұқсас есептеулерді қайталап, (3.7)-дегі екінші және үшінші қосылғыштардың нормалары үшін тиісінше мынаны аламыз

$$\|I_2\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \leq M_9(\Gamma) \cdot |h|^{\nu_1} \cdot |log|h|\,| \cdot \left\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(t)\big)\right\|_{L_p[0,l]},$$

және

$$\|I_3\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_{10}(\Gamma)\cdot|h|^{\nu_1}\cdot|log|h||\cdot\|\varphi(t)\|_{L_p[0,l]}.$$

Осылайша, (3.7), (3.13) және $\mathcal{A}_1\varphi(t)$) функциясының Бесов жартылай нормасы үшін соңғы теңсіздіктерді ескере отырып,

$$r < r_1 < min\{\mu,\nu\}$$

болғанда, келесі теңсіздік шығады

$$\|\mathcal{A}_1\varphi(t)\|_{b^{r_1}_{p,\theta}[0,l]} \equiv \left(\int_{-h_0}^{h_0}\frac{\left\|\Delta_h^2(\cdot)\left(\mathcal{A}_1\varphi(t)\right)\right\|^{\theta}_{L_p[0,l]}}{|h|^{1+\theta r_1}}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\le M_{11}(\Gamma)\cdot\left(\|\varphi(t)\|_{b^{r}_{p,\theta}[0,l]}+\|\varphi(t)\|_{L_p[0,l]}\right)\equiv M_{11}(\Gamma)\cdot\|\varphi(t)\|_{B^{r}_{p,\theta}[0,l]}.$$

Сонымен қатар

$$\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$$

операторы сингуляр операторлардың айырмасы ретінде $L_p[0,l]$, $p>1$ кеңістігінде шенелген. Осылайша, $\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$ операторы $B^{r}_{p,\theta}[0,l]$ кеңістігінен $B^{r_1}_{p,\theta}[0,l]$ кеңістігіне $r < r_1 < min\{\mu,\nu\}$ болғанда шенелген оператор болып табылады. Осыдан

$$B^{r_1}_{p,\theta}[0,l] \hookrightarrow B^{r}_{p,\theta}[0,l]$$

кеңістігінің компактты енуі негізінде, $\mathcal{A}_1 = \gamma WSW^{-1} - S$ операторы $B^{r}_{p,\theta}[0,l]$ кеңістігінде толығымен үзіліссіз екенін байқаймыз. Т е о р е м а 3.4 дәлелденді.

Т е о р е м а 3.5 $0<\nu\le 1$, $\Gamma\in C^1_{\nu}-$ қарапайым тұйық контур. Онда кез келген

$$p>1, \qquad \theta\ge 1, \qquad 0<r<\nu$$

үшін

$$\mathcal{A}_2 = S_\Gamma + \mathrm{C}S_\Gamma\mathrm{C}$$

операторы $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ кеңістігінде толығымен үзіліссіз болып табылады.

Д ә л е л д е у. $t(s) = x(s) + iy(s),\ \ 0 \le s \le l,-$ қарапайым тұйық контур Γ -ның теңдеуі, мұнда $x(s)$ және $y(s)$ функциялары l -периодпен барлық сандық оське жалғастырылған. Осыдан мынаны аламыз

$$\mathcal{A}_2\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\left(\frac{\tau'}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau}'}{\overline{\tau} - \overline{t}}\right)ds_1.$$

Келесі

$$K_2(\tau, t) \equiv K_2(s_1, s) = \frac{\tau'}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau}'}{\overline{\tau} - \overline{t}}.$$

Ұқсас түрде (3.7)-ге, екінші ретті айырма үшін мынаны аламыз

$$\Delta_h^2(s)\big(\mathcal{A}_2\varphi(t)\big) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)\big(\varphi(\tau)\big)(K_2(\tau_h, t_{2h}) - K_2(\tau_h, t_h))ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \Delta_h(s_1)(\varphi(\tau))\big(K_2(\tau_{2h}, t_{2h}) - K_2(\tau_h, t_h)\big)ds_1$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^l \varphi(\tau)\big(K_2(\tau_{2h}, t_{2h}) - 2K_2(\tau_h, t_h) + K_2(\tau, t)\big)ds_1$$

$$\equiv J_1\varphi(s) + J_2\varphi(s) + J_3\varphi(s).$$

Бірінші қосылғыштың $J_1\varphi(s)$ ядросын қарастырайық

$$K_2(\tau_h, t_{2h}) - K_2(\tau_h, t_h) = \left(\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{\overline{\tau_h'}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_{2h}}}\right) - \left(\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h} - \frac{\overline{\tau_h'}}{\overline{\tau_h} - \overline{t_h}}\right)$$

$$= \left(\frac{\tau_h'}{\tau_h - t_{2h}} - \frac{1}{s_1 - s - h} + \frac{1}{s_1 - s} - \frac{\tau_h'}{\tau_h - t_h}\right)$$

$$-\left(\frac{\overline{\tau_h'}}{\overline{\tau_h}-\overline{t_{2h}}}-\frac{1}{s_1-s-h}+\frac{1}{s_1-s}-\frac{\overline{\tau_h'}}{\overline{\tau_h}-\overline{t_h}}\right).$$

Бұл (3.8)–(3.9) теңсіздіктерін қолданып және (3.13)-тің дәлелдеуін қайталау арқылы мынаны алуға болатынын көрсетеді

$$\|J_1\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_8(\Gamma)\cdot|h|^{\nu}\ \cdot|ln|h||\cdot\left\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(t)\big)\right\|_{L_p[0,l]}.$$

$J_2\varphi(s)$ және $J_3\varphi(s)$ қосылғыштарының ядролары үшін ν_1-дің орнына ν көрсеткішімен (3.11)–(3.12) түріндегі бағалаулар дұрыс. Осыдан келесі бағалаулар шығады

$$\|J_2\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_9(\Gamma)\cdot|h|^{\nu}\ \cdot|ln|h||\cdot\left\|\Delta_h(\cdot)\big(\varphi(t)\big)\right\|_{L_p[0,l]},$$

және

$$\|J_3\varphi(\cdot)\|_{L_p[0,l]} \le M_{10}(\Gamma)\cdot|h|^{\nu}\ \cdot|ln|h||\cdot\|\varphi(t)\|_{L_p[0,l]}.$$

Нәтижесінде, Т е о р е м а 3.4-ң дәлелдемесінің соңындағы есептеулерді қайталай отырып, Т е о р е м а 3.5-ң дәлелін аламыз.

Координата бас нүктесін қамтитын D^+ аймағының шекарасын Ляпуновтың Γ тұйық қисығымен белгілейік. D^- арқылы $D^+\cup\Gamma$ толық жазықтыққа толықтырылуын белгілейміз.

$\alpha(t)\colon \Gamma\to\Gamma$ функциясы Γ -ны өзіне гомеоморфты түрде бейнелейтін (яғни, ығысу) және Γ -дағы ориентациясын сақтай отырып немесе өзгертетін болсын, бұл кезде Γ-ны құрайтын әрбір қисық өзін-өзі бейнелеуі керек. Сонымен қатар, $\alpha(t)$ Карлеман шартын қанағаттандырады деп есептейік

$$\alpha\big(\alpha(t)\big)=t \qquad (*)$$

Сызықты түйіндес шекаралық есепті келесі түрде қарастырайық. Шекара сызығы $\Gamma\in C^{1,\nu},\ 0<\nu\le 1$ болсын. Шексіздікке ұмтылғанда нөлге айналатын, және келесі шекаралық шартты қанағаттандыратын

$$\Phi(z)=\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$$

бөлікті-аналитикалық функциясын табу қажет

$$a_1(t)\Phi^+(t) + b_1(t)\Phi^+(\alpha(t)) + c_1(t)\Phi^-(z) + d_1(t)\Phi^-(\alpha(t)) = g(t), \quad (3.14)$$

мұнда коэффициенттер мен оң жақ бөлік Бесов кеңістігіне

$$B^r_{p,1}(\Gamma) \quad \left(r = \frac{1}{p} < \nu, 1 < p < 2\right)$$

тиесілі. Карлеман ығысуы бар сингуляр интегралдық теңдеуді қарастырайық

$$(\mathcal{K}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi\big(\alpha(t)\big) + \frac{c(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$+\frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau + (\mathcal{D}\varphi)(t) = g(t). \quad (3.15)$$

Бесов кеңістігінде $B^r_{p,1}(\Gamma)$ $\left(r = \frac{1}{p} < \nu, 1 < p < 2\right)$, мұндағы $\Gamma \in C^{1,\nu}$ тұйық контур, коэффициенттер $a(t), b(t), c(t), d(t)$ және $g(t)$ $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігіне тиесілі, ал $\mathcal{D}$ операторы

$$(\mathcal{D}\varphi)(t) \equiv \int_\Gamma K(t,\tau)\,\varphi(\tau)d\tau$$

$B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігінде толық үзіліссіз интегралдық оператор болып табылады. Бұл шарттар орындалғанда, берілген (3.15) теңдеуінің сол жақ бөлігіндегі өрнек $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігіне тиесілі екендігі біз дәлелдеген Т е о р е м а 3.1–3.3 және $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігі функцияларды қосу мен көбейту сияқты операцияларға қатысты алгебра болып табылатындығынан шығады. Келесі теңдеу

$$(\mathcal{K}_0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi\big(\alpha(t)\big)$$

$$+\frac{c(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau = g(t), \quad (3.16)$$

(3.15)-тің негізгі бөлігі болып табылатын ($\mathcal{D} \equiv 0$), сипаттамалық теңдеу деп аталады.

Сипаттамалық теңдеу, Γ контурынан жазықтыққа аналитикалық жалғастыру әдісімен, Т е о р е м а 3.1 - 3.3 және Бесов кеңістігіндегі $\varphi(t)$ тығыздығымен Коши тектес интегралды ескере отырып, (3.14) шекаралық есебіне балама түрде келтіріледі, мұнда

$$a_1(t) = a(t) + c(t), \qquad c_1(t) = c(t) - a(t),$$

$$b_1(t) = b(t) + d(t), \qquad d_1(t) = d(t) - b(t). \tag{3.17}$$

Интегралдық теңдеу (3.15) және шекаралық есеп (3.14) операторлық формада келесі түрде жазылуы мүмкін

$$\mathcal{K} = a(t)\mathcal{J} + b(t)W + c(t)\mathcal{S}_\Gamma + d(t)W\mathcal{S}_\Gamma + (\mathcal{D}\varphi)(t), \tag{5.15'}$$

$$(a_1(t)\mathcal{J} + b_1(t)W)\mathcal{P}\varphi - (c_1(t)\mathcal{J} + d_1(t)W)\mathcal{Q}\varphi = g, \tag{5.14'}$$

мұндағы $\mathcal{J}-$ бірлік оператор, $\mathcal{S}_\Gamma -$ Коши ядросы бар сингуляр интеграл оператор, $\mathcal{W}-$ ығысу операторы, $\mathcal{P}$ және $\mathcal{Q}$ – проекторлар

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma) \quad \text{және} \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma).$$

$\alpha(t)$ функциясы Γ-ны өзіне гомеоморфты түрде бейнелейтін, Карлеманның шартын (*) қанағаттандыратын және оның $\alpha'(t)$ туындысы H_μ(Г) кеңістігіне тиесілі болсын.

[21] бойынша, ығысуы бар (3.15) СИТ үшін ығысуы жоқ екі СИТ жүйесін құраймыз, оны (3.15) теңдеуіне сәйкес жүйе деп атайды. Ол үшін (3.15) теңдеуінде тәуелсіз айнымалы t -ны $\alpha(t)$ ауыстырамыз, содан кейін осы тәсілмен алынған теңдеуді бастапқы (3.15) теңдеуіне қосып, жаңа белгісіз функцияларды енгіземіз

$$\rho_1(t) = \varphi(t), \qquad \rho_2(t) = \varphi\big(\alpha(t)\big).$$

Нәтижесінде ығысуы жоқ екі СИТ жүйесін, Коши ядросы болатын, белгісіз вектор $\rho(t) = \{\rho_1(t), \rho_2(t)\}$ функцияға қатысты сәйкес жүйені аламыз

$$a(t)\rho_1(t) + b(t)\rho_2(t) + \frac{c(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho_1(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

$$+\frac{\gamma d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\alpha'(\tau)\rho_2(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau+\int_{\Gamma}K(t,\tau)\,\rho_1(\tau)d\tau=g(t),$$

$$a(\alpha(t))\rho_1(t)+b(\alpha(t))\rho_2(t)$$

$$+\frac{d(\alpha(t)))}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\rho_1(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{\gamma c(\alpha(t))}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\alpha'(\tau)\rho_2(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau$$

$$+\gamma\int_{\Gamma}K\big(\alpha(t),\alpha(\tau)\big)\alpha'(\tau)\,\rho_2(\tau)d\tau=g(\alpha(t)),\qquad(3.18)$$

мұндағы коэффициент $\gamma=+1$ немесе $\gamma=-1$ сәйкесінше $\alpha(t)$ тікелей немесе кері ығысу болған жағдайда.

Әрі қарай, жоғарыда дәлелдегеніміздей, Т е о р е м а 3.4 ескере отырып, жүйенің (3.18) сол жақ бөлігіне сәйкес келетін операторды келесі түрде жазуға болады

$$\mathcal{M}\equiv p(t)\mathcal{J}+q(t)S+\mathcal{D}_1,\qquad(3.18')$$

мұнда $p(t),\ q(t)$ матрицалары келесі түрді алады

$$p(t)=\begin{pmatrix}a(t) & b(t)\\ b(\alpha(t)) & a(\alpha(t))\end{pmatrix},\quad q(t)=\begin{pmatrix}c(t) & \gamma d(t)\\ d(\alpha(t)) & \gamma c(\alpha(t))\end{pmatrix},$$

$\mathcal{D}-$ толық үзіліссіз оператор, немесе келесі түрде

$$\mathcal{M}\equiv CP_1+\mathcal{D}Q_1+\mathcal{D}_1,\qquad(3.18'')$$

мұнда

$$C(t)=p(t)+q(t),\mathcal{D}(t)=p(t)-q(t),$$

$$S_1=\{S\delta_{jk}\}_1^2,\ P_1=\tfrac{1}{2}(\mathcal{J}+S_1),\ Q_1=\tfrac{1}{2}(\mathcal{J}-S_1).$$

мұнда S – сингуляр интегралдау скалярлы операторы, δ_{jk} – Кронекер символы. Келесі теңдеу

$$(\mathcal{T}\chi)(t) = a(t)\chi(t) - b(t)\chi\big(\alpha(t)\big) + \frac{c(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\chi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$-\frac{d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\chi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau + \int_{\Gamma} K(t,\tau)\,\chi(\tau)d\tau = 0, \qquad (3.19)$$

бұл теңдеу (3.15) теңдеуіне сәйкес теңдеу деп аталады. Жеңіл түрде байқауға болады, егер $\rho_1(t) = \chi(t), \rho_2(t) = -\chi\big(\alpha(t)\big)$ деп алсақ, онда біз дәл сол сәйкес жүйеге (3.18) келеміз. Бұл сәйкестік қасиеті өзара қасиет болып табылады. (3.15) біртекті теңдеуі (3.19) теңдеуіне сәйкес келеді. Сондай-ақ, (3.15) және (3.19) сингуляр интегралдық теңдеулерінің одақтас деңдеулнрін қарастырайық

$$(\mathcal{K}'\psi)(t) \equiv a(t)\psi(t) + \gamma\alpha'(t)b\big(\alpha(t)\big)\psi\big(\alpha(t)\big) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{c(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$-\frac{\gamma}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d\big(\alpha(t)\big)\alpha'(\tau)\psi\big(\alpha(\tau)\big)}{\tau - t}d\tau + \int_{\Gamma} m(\tau,t)\,\psi(\tau)d\tau = 0, \qquad (3.20)$$

және

$$(\mathcal{T}'\omega)(t) \equiv a(t)\omega(t) - \gamma\alpha'(t)b\big(\alpha(t)\big)\omega\big(\alpha(t)\big) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{c(\tau)\omega(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$+\frac{\gamma}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d\big(\alpha(t)\big)\alpha'(\tau)\omega(\alpha(\tau))}{\tau - t}d\tau + \int_{\Gamma} m(\tau,t)\,\omega(\tau)d\tau = 0. \qquad (3.21)$$

Мұндағы «одақтастық» ұғымы келесі түрдегі теңдік мағынасында түсініледі

$$\int_{\Gamma} (\mathcal{K}\varphi)(t)\psi(t)\,dt = \int_{\Gamma} \varphi(t)(\mathcal{K}'\psi)(t)\,dt. \qquad (3.22)$$

Қосымша $\mathcal{K}^*\phi = 0$ теңдеуі мен одақтас $\mathcal{K}'\psi = 0$ теңдеуі шешімдерінің арасында қарапайым байланыс бар

$$\phi(t) = \overline{t'(s)\psi(t)}.$$

Сондықтан $\mathcal{K}$ операторы зерттелгенде, оның қосымша операторы $\mathcal{K}^*$-ның

орнына құрылымы қарапайымдау $\mathcal{K}'$ операторын қолданамыз. (3.20) теңдеуі (3.21) теңдеуіне сәйкес келеді.

(3.20) теңдеуіне (демек, (3.21)) сәйкес келетін ығысуы жоқ СИТ жүйесі келесі түрде болады

$$a(t)w_1(t) + b(\alpha(t))w_2(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{c(\tau)w_1(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d\big(\alpha(\tau)\big)w_2(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_{\Gamma} m(\tau, t)\, m(\tau)d\tau = 0,$$

$$b(t)w_1(t) + a\big(\alpha(t)\big)w_2(t) - \frac{\gamma\alpha'(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d(\alpha(\tau)))w_2(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}d\tau$$

$$-\frac{\gamma\alpha'(t)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{c\big(\alpha(\tau)\big)w_2(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}d\tau$$

$$+\gamma\alpha'(t)\int_{\Gamma} m\big(\alpha(\tau), \alpha(t)\big)\, w_2(\tau)d\tau = 0, \qquad (3.23^*)$$

Сондай-ақ, (3.18) жүйесі (3.23*)-пен одақтас екенін атап өтейік. Құрылу логикасына сәйкес, ығысуы жоқ сингуляр теңдеулер жүйесі (3.18) және ығысуы бар сингуляр теңдеулер (3.15), (3.19) бір уақытта не Нетерлік, не Нетерлік емес болады, бұл осы бөлімде дәлелденеді.

3.1 Бесов кеңістіктерінде комплекс түйіндес операторы және Карлеман ығысуы бар шекаралық есептер

Төменде комплекс түйіндес оператор және Карлеман ығысуы бар шекаралық есептің Бесов

$$B^r_{p,1},\ \ r = \frac{1}{p},\ \ 1 < p < 2$$

кеңістіктерінде қойылымы беріледі, мұндағы

$$\Gamma \in C^{1,\nu}, 0 < \frac{2}{p} - 1 < \nu \leq 1$$

Ляпуновтың қарапайым тұйық қисығы, координаттар басын қамтитын D^+ аймағын шектейді. D^- арқылы $D^+ \cup \Gamma$ тұйық облысының толық жазықтық дейінгі толықтауышын белгілейміз.

Біртекті аналитикалық

$$\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\},$$

функциясын табу керек, ол шексіздікте жоғалады ($\Phi^-(\infty) = 0$), мұнда $\Phi^+(z)$ және $\Phi^-(z)$ функциялары сәйкесінше D^+ және D^- облыстарында аналитикалық болып табылады және Γ -да келесі шекаралық шартты қанағаттандырады

$$\tilde{a}_0(t)\Phi^+(t) + \tilde{b}_0(t)\overline{\Phi^+(t)} + \tilde{c}_0(t)\Phi^-(t) + \tilde{d}_0(t)\overline{\Phi^-(t)} + \tilde{a}_1(t)\Phi^+(\alpha(t))$$

$$+\tilde{b}_1(t)\overline{\Phi^+(\alpha(t))} + \tilde{c}_0(t) + \tilde{d}_0(t)\overline{\Phi^-(\alpha(t))} = g(t), \qquad (3.23)$$

мұнда (3.23)-дегі коэффициенттер мен оң жақ бөлік $B^r_{p,1}(\Gamma)$ Бесов кеңістігіне тиесілі.

Шекаралық есептің келесі жеке жағдайында (3.23)-дегі шекаралық шарт Γ-дағы келесі шартпен алмастырылады

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad (3.24)$$

мұнда $G(t)$ және $g(t)$ – $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігіндегі берілген функциялар, $G(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma)$, және $\alpha(t)$ ығысуы Γ -дағы ориентацияны сақтайды, бұл есеп әдетте Газеманның шекаралық есебі деп аталады.

Бесов кеңістіктерінде

$$B^r_{p,1}(\Gamma) = B(\Gamma), \qquad r = \frac{1}{p} < \nu \leq 1, \qquad 1 < p < 2$$

Карлеман $\alpha(t)$ ығысуы мен Коши ядросы бар, сонымен қатар белгісіз функцияның комплекс түйіндес мәндері бар келесі сингуляр интегралдық теңдеуді қарастырайық

$$(\mathcal{K}\varphi)(t) \equiv a_0(t)\varphi(t) + b_0(t)\overline{\varphi(t)}$$

$$+\frac{c_0(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+d_0(t)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{\tau-t}$$

$$+a_1(t)\varphi\big(\alpha(t)\big)+b_1(t)\overline{\varphi\big(\alpha(t)\big)}$$

$$+\frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(t)}+d_1(t)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{\varphi(t)}d\tau}{\tau-\alpha(t)}$$

$$+\int\limits_{\Gamma}K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)d\tau+\int\limits_{\Gamma}\overline{K_2(t,\tau)\varphi(\tau)}d\tau=g(t), \qquad (3.25)$$

мұнда $a_k(t), b_k(t), c_k(t), d_k(t), g(t),\ \ (k=0,1)$ функциялары $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігіне тиесілі.

Ядролар $K_1(\tau,t))$ және $K_2(\tau,t)$ әлсіз ерекшеліктерге ие болуы мүмкін деп есептейміз, бұл сәйкес операторлардың қасиеттеріне әсер етеді

$$(\mathcal{D}_1\varphi)(t)=\int\limits_{\Gamma}K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)d\tau,$$

$$(\mathcal{D}_1\varphi)(t)=\int\limits_{\Gamma}\overline{K_2(t,\tau)\varphi(\tau)}d\tau$$

$B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістіктерінде толық үзіліссіз болып табылады.

Коши бойынша сингуляр интегралдау операторы S-тің, комплекс түйіндес операторларының $(\mathrm{C}\varphi)(t)=\overline{\varphi(t)}$, және ығысу $(W\varphi)(t)=\varphi(\alpha(t))$ операторларының $B^r_{p,1}(\Gamma)$ кеңістігінде шенелгендігі Т е о р е м а 3.2-3.3-тен шығады.

Сохоцкий-Племельдің Коши тектес интегралдың тығыздығы $\varphi(t)$-ге байланысты шекаралық мәндері туралы формулаларының көмегімен, сипаттамалық теңдеу (3.25) (яғни, $K_1(\tau,t)= K_2(\tau,t)=0$) шекаралық есепке (3.23) эквивалент болады, мұндағы

$$\tilde{a}_k(t)=a_k(t)+c_k(t), \qquad \tilde{c}_k(t)=c_k(t)-a_k(t),$$

$$\tilde{b}_k(t) = b_k(t) - d_k(t), \qquad \tilde{d}_k(t) = d_k(t) - b_k(t), \qquad (K = 0,1).$$

Осылайша, шекаралық есептің (3.23) нетер шешімділігі сәйкес Бесов кеңістіктерінде сингуляр интегралдық теңдеудің (3.25) нетер шешімділігінен шығады. Сингуляр интегралдық теңдеудің (3.25) нетерлік шешімділігінің шарттары бұл теңдеуді белгілі бір мағынада эквивалентті, комплекс түйіндес операторын және ығысу операторын қамтымайтын сингуляр интегралдық теңдеулер жүйелеріне біртіндеп келтіру арқылы алынады. Бұл үшін біз [23] монографиясының әдісін қолданамыз және сингуляр жүйелер мен теңдеулердің сәйкесінше және сәйкес деп аталатын түрлерін жазамыз, олар сингуляр теңдеумен (3.25) бір уақытта нетер шешімді немесе шешілмейтін болуы керек.
Шекаралық есепті нетер (фредгольмдік) шешімді сингуляр интегралдық теңдеуге келтіру мүмкіндігін көрсету үшін шекаралық есептің келесі қарапайым жағдайын қарастырайық. Газеманның Бесов

$$B_{p,1}^{\frac{1}{p}}(\Gamma), 1 < p < 2$$

кеңістіктеріндегі шекаралық есебі

$$\Phi^+(\alpha(t)) = \Phi^-(t) \qquad (\Phi^-(\infty) = 0). \tag{3.26}$$

Бұл есептің тривиалды емес шешімдері жоқ екенін көрсетеміз.

$$\Phi(t) = \{\Phi^+(t), \Phi^-(t)\}$$

(3.26) біртекті есептің кейбір шешімі болсын. Онда Бесов кеңістіктеріндегі интегралдық проекторлардың қасиеттеріне сәйкес [16], [11], [12] (қараңыз: I бөлім, 3-тармақ)

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(\mathcal{J} + \mathcal{S}) \quad \text{және} \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2}(\mathcal{J} - \mathcal{S}),$$

мұндағы

$$\mathcal{S}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

сингуляр интегралдау операторы үшін мынаны аламыз

$$(Q\Phi^+)(t) = \frac{1}{2}\Phi^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^+(\tau)d\tau}{\tau - t} = 0, \qquad (3.27)$$

$$(\mathcal{P}\Phi^-)(t) = \frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau)d\tau}{\tau - t} = 0. \qquad (3.28)$$

(3.27)-тегі t-ны $\alpha(t)$-ға және τ-ны $\alpha(\tau)$-ға ауыстыра отырып, мынаны аламыз

$$\frac{1}{2}\Phi^+(\alpha(t)) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^+\big(\alpha(\tau)\big)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\, d\tau = 0. \qquad (3.29)$$

Шекаралық теңдеу (3.26)-ке сәйкес, (3.29)-ден мынаны аламыз

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^-(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\, d\tau = 0. \qquad (3.30)$$

(3.28) және (3.30)-ді қосып, келесі интегралдық теңдеуді аламыз

$$\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right) \Phi^-(\tau)d\tau = 0. \qquad (3.31)$$

Т е о р е м а 3.4 бойынша, бұл теңдеу Фредгольмның канондық теңдеуі болып табылады, демек, оның ақырлы сызықты тәуелсіз шешімдері бар. Кез келген (3.26) шекаралық есептің шешімінің шекаралық мәндері (3.31) теңдеуін қанағаттандыратындықтан, (3.26) шекаралық есебі де ақырлы сызықты тәуелсіз шешімдерге ие болады.

Тұрақты функция (3.26) есебінің шешімі болып табылады. Алайда,

$$\Phi^-(\infty) = 0$$

шартынан бұл тұрақты нөлге тең болуы тиіс. Егер

$$\{\Phi_1{}^+(z), \Phi_1{}^-(z)\},$$

тұрақты емес, бөлікті-аналитикалық функциясы (3.26) есебінің шешімі болса, онда бұл функциялардың кез келген оң бүтін дәрежесі де (3.26) есебінің шешімі болады

$$\{\Phi_1^+(\alpha(t))\}^k = \{\Phi_1^-(t)\}^k, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Алайда, бөлікті-аналитикалық функциялар

$$(\{\Phi_1^+(z)\}^k, \{\Phi_1^-(z)\}^k)$$

сызықты тәуелсіз және олардың саны шексіз. Бұл (3.26) шекаралық есебінің ақырла сызықты тәуелсіз шешімдерге ие екендігіне қайшы келеді.

Осылайша, Газеманның

$$B_{p,1}^{\frac{1}{p}}(\Gamma), \qquad 1 < p < 2$$

кеңістігіндегі ең қарапайым біртекті шекаралық есебі тек тривиалды шешімге ие.

Бұл дегеніміз, кез келген оң жақ бөлігі үшін Фредгольмның біртекті емес теңдеуі шешімді болады.

Бұл тәсіл сондай-ақ Газеманның (3.24) есебінің нетер шешімділігін көрсетуге мүмкіндік береді. [23] жұмысының 119–120 беттеріндегі ұқсас дәлелдерді қайталау арқылы дәлелдеу жеткілікті.

3.2 Сингуляр интегралдық теңдеулердің сәйкес жүйесінің құрылымы

Карлеман ығысуы бар және комплекс түйіндес операторы бар (3.25) сингуляр интегралдық теңдеулер жүйесіне қайта оралайық. Бұл теңдеудің сол жағын, яғни оператор $\mathcal{K}$-ны және шекаралық есепті (3.23) сингуляр интегралдау операторлары S комплекс түйіндес операторлары C және ығысу операторлары Wарқылы келесі түрде өрнектеуге болады.

$$\mathcal{K} \equiv a_0(t)W^0 + c_0(t)W^0\mathcal{S} + b_0(t)W^0\mathrm{C} + d_0(t)W^0\mathrm{C}\mathcal{S}$$

$$+a_1(t)W + c_1(t)W\mathcal{S} + b_1(t)W\mathrm{C} + d_1(t)W\mathrm{C}\mathcal{S} + \mathcal{D}_1 + \overline{\mathcal{D}_2},$$

$$\{\tilde{a}_0(t)W^0 + \tilde{b}_0(t)W^0\mathrm{C}+\tilde{a}_1(t)W + \tilde{b}_1(t)W\mathrm{C}\}\mathcal{P}\varphi$$

$$+\{c_0(t)W^0 + d_0(t)W^0\mathrm{C} + c_1(t)W + d_1(t)W\mathrm{C}\}\mathcal{Q}\varphi = g(t),$$

мұндағы $\mathcal{D}_1$ және $\mathcal{D}_2$ – толық үзіліссіз операторлар, ал $\mathcal{P}$ және $\mathcal{Q}$ – Сохоцкий-Племеля формуласынан алынған проекциялық операторлар.

(3.25) теңдеудің шешімдерінің сызықтық тәуелсіздігі мен шешу шарттары нақты коэффициенттері бар сызықтық формалар түрінде нақты сандар өрісінде қарастырылады.

Осыған сәйкес, $\mathcal{K}$ операторы үшін $\mathcal{K}'$ одақтас операторы келесі нақты теңдік арқылы анықталады

$$Re\int_{\Gamma}\psi(t)\,(\mathcal{K}\varphi)(t)dt = Re\int_{\Gamma}\varphi(t)\,(\mathcal{K}'\psi)(t)dt$$

және мына түрге ие болады

$$(\mathcal{K}'\varphi)(t) \equiv a_0(t)\psi(t) + \overline{b_0(t)t'^2(s)\psi(t)}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{c_0(\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{d_0(\tau)\tau'^2(\sigma)\psi(\tau)}d\tau}{\tau - t}$$

$$+\gamma\left[a_1\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t)\psi\big(\alpha(t)\big) + \overline{b_1\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t)t'^2(s)\psi\big(\alpha(t)\big)}\right.$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{c_1\big(\alpha(\tau)\big)\alpha'(\tau)\psi\big(\alpha(\tau)\big)d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{d_1\big(\alpha(\tau)\big)\alpha'(\tau)\tau'^2(\sigma)\psi\big(\alpha(\tau)\big)}d\tau}{\tau - t}$$

$$+\int_{\Gamma}K_1(\tau,t)\,\psi(\tau)d\tau + \int_{\Gamma}K_2(\tau,t)\,\overline{\tau'^2(\sigma)\psi(\tau)}d\tau,$$

мұндағы $\gamma = +1$ немесе $\gamma = -1$, сәйкесінше $\alpha(t)$ ығысуы тікелей немесе кері болып табылады.

Оператор $\mathcal{K}'$ нақты сандар өрісінде қарастырылатын $B(\Gamma)$ -кеңістіктерінде әрекет етеді. Мұндай нақты кеңістіктерді $\tilde{B}$ деп белгілейміз.

Сингуляр интегралдық теңдеуге (3.25) оның белгісіз функцияларының комплекс түрде қосылмаған мәндерін қамтымайтын екі сингуляр теңдеуден тұратын жүйе сәйкес келеді. Бұл жүйе (3.25) теңдеуі үшін сәйкес жүйе деп аталады.

Ол үшін, (3.25) теңдеуіне оның комплекс түрде қосылған мәндеріне өту арқылы алынған теңдеуді қосып, жаңа белгісіз функцияларды енгіземіз

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \qquad \varphi_2(t) = \overline{\varphi(t)}.$$

Сонда, Карлеман ығысуларымен келесі векторға қатысты жүйені аламыз $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$.

$$a_0(t)\varphi_1(t) + b_0(t)\varphi_2(t) + \frac{c_0(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(t)d\tau}{\tau - t} - \frac{d_0(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_2(\tau)\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar{\tau} - \bar{t}}$$

$$+a_1(t)\varphi_1\big(\alpha(t)\big) + b_1(t)\varphi_2\big(\alpha(t)\big) + \frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(t)} + \frac{d_1(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_2(\tau)\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar{\tau} - \overline{\alpha(t)}}$$

$$+\int\limits_{\Gamma} K_1(t,\tau)\,\varphi_1(\tau)d\tau + \int\limits_{\Gamma}\overline{K_2(t,\tau)\tau'^2(\sigma)}\,\varphi_2(\tau)d\tau = g(t) \tag{3.32}$$

$$\overline{b_0(t)}\varphi_1(t) + \overline{a_0(t)}\varphi_2(t) + \frac{\overline{d_0(t)}}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(t)d\tau}{\tau - t} - \frac{\overline{c_0(t)}}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_2(\tau)\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar{\tau} - \bar{t}}$$

$$+\overline{b_1(t)}\varphi_1\big(\alpha(t)\big) + \overline{a_1}(t)\varphi_2\big(\alpha(t)\big) + \frac{\overline{d_1(t)}}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(t)} - \frac{\overline{c_1(t)}}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_2(\tau)\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar{\tau} - \overline{\alpha(t)}}$$

$$+\int\limits_{\Gamma} K_2(t,\tau)\,\varphi_1(\tau)d\tau + \int\limits_{\Gamma}\overline{K_1(t,\tau)\tau'^2(\sigma)}\,\varphi_2(\tau)d\tau = \overline{g(t)}$$

Сол сияқты,

$$\psi_1(t) = \psi(t), \qquad \psi_2(t) = \overline{\psi(t)}$$

функцияларына қатысты

$$K'\psi = 0$$

одақтас теңдеуіне сәйкес сингуляр интегралдық теңдеулер жүйесін жазуға болады. Алайда, бұл қажет емес, себебі бұл жүйенің (3.32) жүйесіне одақтас екені анық.

Л е м м а 3.1. Біртекті $(g(t) \equiv 0)$ (3.25) теңдеуі мен біртекті (3.32) жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны тең болады.

Д ә л е л д е у. Түсіну қиын емес, (3.25) теңдеуінің шешімдерінің сызықтық тәуелсіздігін нақты сандар өрісінде, ал (3.32) жүйесінің сызықтық тәуелсіздігін комплекс сандар өрісінде қарастыру керек.

k және l сәйкесінше (3.25) біртекті теңдеуінің және (3.32) біртекті жүйесінің толық сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны болсын. Біз $k = l$ екенін көрсетеміз. Бұдан әрі мұндай шешімдерді қысқаша жүйенің фундаменталдық шешімдері (ж. ф. ш.) деп атаймыз

$$\{\varphi_j(t)\}, \qquad j = 1,2, \dots, k$$

біртекті теңдеуінің ж. ф. ш. болсын. Онда, (3.32) жүйесін құру әдісін еске алсақ, оңай көруге болады:

$$\varphi_1^{(j)}(t) = \varphi_j(t), \qquad \varphi_2^{(j)}(t) = \overline{\varphi_j(t)} \qquad j = 1,2, \dots k$$

(3.32) жүйесінің (g=0) біртекті шешімдері болып табылады және олар келесі шарттарды қанағаттандырады

$$\varphi_2^{(j)} = \overline{\varphi_1^{(j)}(t)}. \tag{3.33}$$

Осылайша, $k \le l$. Енді

$$\xi^{(j)}(t) = \left\{\varphi_1^{(j)}(t),\ \varphi_2^{(j)}(t)\right\}, j = 1,2, \dots l,$$

(3.32) біртекті жүйесінің ж. ф. ш. болсын. Сонда тікелей тексеру арқылы

$$\overline{\xi}^{(j)}(t) = \left\{\overline{\varphi_2^{(j)}(t)}, \overline{\varphi_1^{(j)}(t)}\right\}, \qquad j = 1,2, \dots l,$$

(3.32) біртекті жүйесінің ж. ф. ш. болатынын көруге болады. Сәйкесінше, мынадай түрде жазуға болады

$$\overline{\varphi_2^{(j)}(t)} = \sum_{\nu=1}^{l} \lambda_{j\nu} \varphi_j^{(\nu)}(t), \quad \overline{\varphi_1^{(j)}(t)} = \sum_{\nu=1}^{l} \lambda_{j\nu} \varphi_2^{(\nu)}(t), \qquad (3.34)$$

мұнда $j = 1,2, \dots l,$ – комплекс сандар. Сонда оңай көз жеткізуге болады, келесі функциялар

$$\xi_1^{(j)}(t) = \delta\varphi_1^{(j)}(t) + \overline{\delta\varphi_2^{(j)}(t)}, \xi_2^{(j)}(t) = \delta\varphi_2^{(j)}(t) + \overline{\delta\varphi_1^{(j)}(t)}, \qquad (3.35)$$

мұндағы δ – төменде анықталатын тұрақты, ол (3.32) теңдеуімен сәйкес келетін біртекті жүйенің шешімін құрайды және (3.33) шартын қанағаттандырады

$$\xi_2^{(j)}(t) = \overline{\xi_1^{(j)}(t)},$$

мұндағы

$$\varphi_j(t) = \overline{\xi_1^{(j)}(t)}\ j = 1,2, \dots l$$

функциялары біртекті теңдеудің (3.25) шешімдері екенін қорытындылаймыз.

$$\varphi_j(t), \qquad j = \overline{1, l},$$

функцияларының нақты сандар өрісінде сызықтық тәуелсіз екенін көрсету керек. Болжам бойынша

$$\sum_{j=1}^{l} \gamma_j \varphi_j(t) = 0,$$

мұнда γ_j – нақты сандар. Осыдан (3.34) және (3.35) теңдеулерін пайдаланып, біз γ_ν айнымалыларына қатысты келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\sum_{\nu=1} \mathrm{C}_{j\nu}\gamma_\nu = 0, \quad j = 1, l,$$

мұндағы

$$\|\mathrm{C}_{j\nu}\| = \delta E_l + \delta\|\lambda_{\nu j}\|$$

матрицасы, ал E_l– бірлік матрица. δ мәнін таңдап,

$$det\|\mathrm{C}_{j\nu}\| = \overline{\delta^l}\, det(\frac{\delta}{\overline{\delta}} E_l + \|\lambda_{\nu j}\|) \neq 0,$$

осылайша барлық $\gamma_\nu = 0$ болады. Демек, $l \leq k$. Бұрын $k \leq l$ екені көрсетілді. Осылайша, $k = l$. Л е м м а 6.1 дәлелденді.

Л е м м а 3.2. Біртекті байланыс теңдеуі

$$\mathcal{K}'\varphi = 0$$

және (3.32) жүйесімен байланысты теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдер санды тең болады ($k^* = l^*$).

Д ә л е л д е у. Бұл дәл Л е м м а 3.1 дәлелі сияқты.

Л е м м а 3. 3. Біртекті емес сингуляр интегралдық теңдеу (3.24) шешілетін болады, сонда тек сонда ғана егер оған сәйкес келетін сингуляр интегралдық теңдеулер жүйесі (3.32) шешілсе.

Д ә л е л д е у. $\varphi(z)$ – (3.25) теңдеудің шешімі болсын. Олай болса,

$$\varphi_1(t) = \varphi(t), \qquad \varphi_2(t) = \overline{\varphi(t)}$$

жұбы (3.32) жүйенің

$$\xi(t) = \{\varphi_1(t), \qquad \varphi_2(t)\}$$

шешімі болады. Енді, (3.32) жүйесі $\{\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)\}$ шешіміне ие болсын. Сонда тікелей тексеру арқылы, $\{\overline{\varphi_2(t)},\ \overline{\varphi_1(t)}\}$ векторда жүйенің (3.32) шешімі екенін көреміз. Осыдан, біртекті емес жүйе (3.32) шешімі бар екені шығады

$$\xi^*(t) = \{\xi_1^*(t),\ \xi_2^*(t)\},$$

мұндағы

$$\xi_1^*(t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \overline{\varphi_2(t)}),\ \xi_2^*(t) = \frac{1}{2}[\varphi_2(t) + \overline{\varphi_1(t)}].$$

Бірақ, $\xi_2^*(t) = \overline{\xi_1^*(t)}$ теңдігі орындалады. Бұл дегеніміз, $\varphi(t) = \xi_1^*(t)$ теңдеудің (3.25) шешімі болып табылады. Л е м м а 6.3 дәлелденді.

Осылайша, (3.25) теңдеуі және оған сәйкес жүйе (3.32) тек бір мезгілде қалыпты түрде шешілетінін қорытындылаймыз.

Л е м м а 3.1 – 6.3 көмегімен келесі негізгі қорытындыны оңай дәлелдеуге болады.

Т е о р е м а 3.6 Ығысуы бар және ізделіп отырған функциялардың комплекс-түйіндес мәндерімен (3.25) сингуляр интегралдық теңдеуі белгісіз функциялардың комплекс- түйіндес мәндері жоқ (3.32) сингулярлы интегралдық теңдеулер жүйесімен бір мезгілде нетер оператор немесе нетер емес оператор болады. Егер олар нетер оператор болса, онда олардың индекстері тең болады.

Д ә л е л д е у. Егер (3.32) жүйе нетер болса, онда l саны ақырлы, ал (3.32) жүйе қалыпты түрде шешілімді болса, онда l^* саны да ақырлы болады. Л е м м а л а р 6.1 және 6.2-ден k және k^* сандары да ақырлы екені шығады, ал Л е м м а 3.3 бойынша оператор $\mathcal{K}$ қалыпты түрде шешілімді, демек, $\mathcal{K}$ нетер. Толығымен аналогиялық түрде, $\mathcal{K}$ операторының нетер екендігі (3.32) жүйенің нетер екендігіне әкелетінін көрсетуге болады. Ақырында, Л е м м а л а р 6.1 және 6.2 бойынша

$$ind\mathcal{K} = k - k^* = l - l^*,$$

мұндағы $l - l^*$ (3.32) жүйенің индексі болып табылады.

Т е о р е м а 3.6 дәлелденді.

Осылайша, Карлеман ығысу бар және белгісіз функцияның комплекс-түйіндес мәндерімен (3.25) сингуляр интегралдық теңдеудің нетерлік шарттарын алу есебі толықтай 5 бөліміндегі ұқсас тапсырмаға айналды, онда белгісіздердің комплекс- түйіндес операциясы жоқ.

Сингулярлы интегралдық теңдеуді қарастырайық

$$L\varphi \equiv a(t)\overline{\varphi(t)} + b(t)\varphi[\alpha(t)] + c(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau - t}d\tau + \frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau$$

$$+\int_{\Gamma} K_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_{\Gamma}\overline{K_2(t,\tau)\varphi(\tau)}d\tau=g(t), \qquad (3.36)$$

мұндағы $a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$ және $g(t)$ функциялары

$$B(\Gamma)=B_{p,1}^{r}(\Gamma), \qquad r=\frac{1}{p}<\nu\leq 1, \qquad 1<p<2$$

кеңістігіне тиесілі. Г контуры және Карлеман ығысуы $\alpha(t)$ (3.25)-тегі шарттарға сәйкес келеді.

$$K_j(t,\tau), \qquad j=1,2$$

ядроларының әлсіз ерекшеліктері бар, сондықтан сәйкес интегралдық операторлар $B(\Gamma)$-де толық үзіліссіз. (3.36) теңдеуі (3.25) теңдеуінің дербес жағдайы болып табылады және техникалық күрделіліктерді айналып өтіп, зерттелетін есептердің нетерлік шарттарын анықтау жолын белгілейді. Бұл жағдай ерекше қызығушылық тудырады, себебі 3-бөлімдегі кейбір түсініктер (3.36) теңдеуі үшін екі теңдеуден тұратын көмекші жүйе құруға мүмкіндік береді, бұл жүйе (3.36)-ке эквивалентті, дәл сол сияқты (3.32) жүйесі (3.25)-ке эквивалентті. Бірақ бұл көмекші жүйе Коши ядросы бар сингуляр интегралдық жүйе болып табылады, яғни ол комплекс-түйіндес операторы да, ығысу операторы да болмайды. Сондықтан, [24], [26], [27] белгілі нәтижелеріне сүйене отырып, СИТ (3.36) үшін сызықтық тәуелсіздік шарттарын және индекс формуласын тікелей алуға мүмкіндік береді. (3.36) теңдеуі [23] жұмысында

$$H_{\mu}(\Gamma),\ \ 0<\mu\leq 1 \qquad \text{және} \qquad L_p(\Gamma),\ 1<p<\infty$$

кеңістіктерінде қарастырылған. Көмекші жүйе келесідей құрылады: (3.36) теңдеуіне t-ны $\alpha(t)$-ға ауыстырып және белгісіздердің комплекс-түйіндес мәндерін енгізу арқылы алынған тағы бір теңдеу қосылады. Осылайша, жаңа белгісіз функцияларды енгізе отырып

$$\rho_1(t)=\overline{\varphi(t)}, \qquad \rho_2(t)=\varphi[\alpha(t)]$$

Коши ядросы бар келесі екі сингулярлы теңдеулер жүйесін аламыз, онда белгісіз функциялардың ығысу бар және комплекс-түйіндес операторлары жоқ

$$a(t)\rho_1(t) + b(t)\rho_2(t) + \int_\Gamma \overline{m(t,\tau)\tau'^2(\gamma)}\rho_1(\tau)d\tau$$

$$+\gamma \int_\Gamma n[\alpha(t),\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\rho_2(\tau)d\tau = g(t) \tag{3.37}$$

$$\overline{b[\alpha(t)]}\rho_1(t) + \overline{a[\alpha(t)]}\rho_2(t) + \int_\Gamma \overline{n(t,\tau)\tau'^2(\gamma)}\rho_1(\tau)d\tau$$

$$+\gamma \int_\Gamma m[\alpha(t),\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\rho_2(\tau)d\tau = \overline{g[\alpha(t)]}$$

мұдағы

$$m(t,\tau) = \frac{\overline{c(t)}}{\pi i}\frac{1}{\tau - t} + K_2(t,\tau),$$

$$n[\alpha(t),\alpha(\tau)] = \frac{d(t)}{\pi i}\frac{1}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} + K_1(t,\tau),$$

егер $\alpha(t)$ сәйкесінше Γ-ны өзіне бағытты сақтай отырып немесе өзгертіп бейнелейтін болса, γ мәні +1 немесе −1 қабылдайды.

Л е м м а 3.4. Біртекті ($g(t) \equiv 0$) сингулярлы интегралдық теңдеудің (3.36) сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны Коши ядросы бар сингулярлы интегралдық теңдеулер жүйесінің (3.37) сызықтық тәуелсіз шешімдерінің санына тең.

Д ә л е л д е у. Егер

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t)$$

біртекті теңдеудің (3.23) фундаментальды шешімдер жүйесі (ф.ш.ж.) болса, онда (3.37) жүйесін құру әдісінен

$$\rho^{(j)}(t) = \left\{\rho_1^{(j)}(t),\ \rho_2^{(j)}(t)\right\},$$

мұндағы

$$\rho_1^{(j)}(t) = \overline{\varphi_j(t)}, \qquad \rho_2^{(j)}(t) = \varphi_j([\alpha(t)]), \qquad j = 1,2,\dots k$$

векторлары біртекті (3.37) жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдері болатыны шығады. Демек, $k \le l$, мұнда l – біртекті (3.37) жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны. Егер

$$\rho^{(j)}(t) = \left\{\rho_1^{(j)}(t),\ \rho_2^{(j)}(t)\right\}, \quad j = 1,2,\dots l$$

(3.37) жүйесінің фундаментальды шешімдер жүйесі болса, онда (3.37) жүйесінің екі теңдеуінде де t-ны $\alpha(t)$-ға, τ-ны $\alpha(\tau)$-ға ауыстырып, және комплекс-конъюгацияланған шамаларға өту арқылы, (3.37)-ке сәйкес

$$\rho_-^{(j)}(t) = \left\{\overline{\rho_2^{(j)}[\alpha(t)]}, \qquad \overline{\rho_1^{(j)}[\alpha(t)]}\right\}, \qquad j = 1,2,\dots l$$

векторлары да біртекті (3.37) жүйесінің фундаментальды шешімдер жүйесін құрайтынын аламыз. Сонда компоненттері бар $\tilde{\rho}^{(j)}(t)$ векторы былай анықталады

$$\tilde{\rho}_1^{(j)}(t) = \delta\rho_1^{(j)}(t) + \overline{\delta\rho_2^{(j)}[\alpha(t)]}, \quad \tilde{\rho}_2^{(j)}(t) = \delta\rho_2^{(j)}(t) + \overline{\delta\rho_1^{(j)}[\alpha(t)]}, \quad j = 1,2,\dots l,$$

δ — кейінірек таңдалатын тұрақты, ол біртекті (3.37) жүйесінің шешімі болып табылады және

$$\tilde{\rho}_2^{(j)}(t) = \overline{\tilde{\rho}_1^{(j)}[\alpha(t)]}$$

шартын қанағаттандырады. Осыдан

$$\varphi_j(t) = \overline{\tilde{\rho}_1^{(j)}(t)}, \qquad j = 1,2,\dots l$$

функциялары біртекті (3.36) теңдеудің шешімдері екені шығады. δ тұрақтысын [23]-тегі (8.2-б.) тәсілге сәйкес таңдай отырып, $\{\varphi_j(t)\},\ j = 1,2,\dots l$ функциялары нақты сандар өрісінде сызықтық тәуелсіз екенін көрсетуге болады. Демек, $l \le k$. Л е м м а 3.4 дәлелденді.

Л е м м а 3.5 (3.36) теңдеуге сәйкес келетін одақтас теңдеудің

$$L'\psi \equiv \overline{a(t)t'^2(s)\psi(t)} + \gamma b[\alpha(t)]\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{c(\tau)\tau'^2(\gamma)\psi(\tau)}}{\tau - t}d\tau + \frac{\gamma}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d[\alpha(t)]\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]}{\tau - t}d\tau$$

$$+\int_{\Gamma} K_1(\tau,t)\psi(\tau)d\tau + \int_{\Gamma} K_2(\tau,t)\overline{\tau'^2(\gamma)\psi(\tau)}d\tau = 0,\ \ \gamma = \pm 1, \quad (3.38)$$

сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны K^* болсын, ал (3.37) жүйесіне одақтас теңдеулер жүйесінің

$$a(t)\omega_1(t) + \overline{b[\alpha(t)]}\omega_2(t)$$

$$+\overline{t'^2(s)}\left[\int_{\Gamma}\overline{m(\tau,t)}\omega_1(\tau)d\tau + \int_{\Gamma}\overline{n(\tau,t)}\omega_2(\tau)d\tau\right] = 0, \quad (3.39)$$

$$b(t)\omega_1(t) + \overline{a[\alpha(t)]}\omega_2(t)$$

$$+\gamma\alpha'(t)\left[\int_{\Gamma} n[\alpha(\tau),\alpha(t)]\omega_1(\tau)d\tau + \int_{\Gamma} m[\alpha(\tau),\alpha(t)\ ]\omega_2(\tau)d\tau\right] = 0,$$

сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны l^* болсын. Онда $K^* = l^*$.

Л е м м а 3.1-ге ұқсас дәлелденеді, айырмашылығы тек келесіде: егер $\psi_j(t)$ – (3.38) теңдеудің шешімі болса, онда

$$\{\omega_1^{(j)}(t),\ \ \omega_2^{(j)}(t)\}$$

(3.39) жүйесінің шешімі теңдеулердің көмегімен құрылады:

$$\omega_1^{(j)}(t) = \psi_j(t),\ \ \omega_2^{(j)}(t) = \gamma\overline{\alpha'(t)t'^2(s)\psi_j[\alpha(t)]}, \quad (3.40)$$

және керісінше, егер $\{\omega_1^{(j)}(t), \omega_2^{(j)}(t)\}$ – (3.39) жүйесінің шешімі болса, онда вектор

$$\{\overline{\gamma\alpha'(t)t'^2(s)\omega_2^{(j)}[\alpha(t)]}, \qquad \overline{\gamma\alpha'(t)t'^2(s)\omega_1^{(j)}[\alpha(t)]}\}$$

сондай-ақ (3.39) жүйесінің шешімі болып табылады. Сондықтан, жоғарыда айтылғандай, (3.39) жүйесінің фундаментальды шешімдер жүйесін (ф.ш.ж.) әрдайым (3.40) шарттарын қанағаттандыратындай етіп таңдап алуға болатынын көрсетуге болады.

Л е м м а 3.6 Белгісіз шаманың ығысуы мен комплекс түйіндес мәндері бар (3.36) сингуляр интегралдық теңдеу шешіледі сонда тек сонда ғана егер Коши ядросы бар (3.37) сингуляр интегралдық теңдеулер жүйесі шешілсе болса.

Д ә л е л д е у. Л е м м а 3.1 дәлелдеуіне ұқсас. Егер $\varphi(t)$ – (3.36) теңдеуінің шешімі болса, онда $\{\overline{\varphi(t)},\ \varphi[\alpha(t)]\}$ векторы (3.37) жүйесінің шешімі болады. Кері жағдайда, егер $\{\rho_1(t),\ \rho_2(t)\}$ – (3.37) жүйесінің шешімі болса, онда осы жүйенің шешімін $\{\tilde{\rho}_1(t),\ \tilde{\rho}_2(t)\}$ түрінде құруға болады, мұндағы

$$\tilde{\rho}_1(t) = \frac{1}{2}\{\rho_1(t) + \overline{\rho_2[\alpha(t)]}\}, \qquad \tilde{\rho}_2(t) = \frac{1}{2}\{\rho_2(t) + \overline{\rho_1[\alpha(t)]}\},$$

$\tilde{\rho}_2(t) = \overline{\tilde{\rho}_1[\alpha(t)]}$ шартын қанағаттандыратындықтан, $\varphi(t) = \overline{\tilde{\rho}_1(t)}$ функциясы (3.36) теңдеуінің шешімі болады. Л е м м а 3.6 дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста көп байланысты облыстардағы бөлікті аналитикалық функциялар үшін Риман шекаралық есебі Бесов кеңістіктерінде зерттелді. Зерттеу барысында аналитикалық функциялар теориясында кеңінен қолданылатын Коши тектес интегралдар әдісі бойыша Гёльдер шартын қажет етпейтін жағдайда шекаралық есептердің шешімі бар болатыны дәлелденді. Сонымен қатар, Бесов кеңістіктерінде анықталған Коши тектес интегралдардың үзіліссіздігіне қатысты жаңа нәтижелер алынды.

Қосымша нәтиже ретінде, сингуляр интеграл операторлардың шенелгендігіне қойылатын шарттар жалпыланды. R-сызықты есебі екі байланысты облыстарда зерттелді. Бірлік дискінің конформды бейнелеу әдісі қолданылды, Дирихле және Нейман есептерінің меншікті мәндерінің бар болуының шарттары алынды.

Қорытындылай келе, бұл диссертациялық жұмыс аналитикалық функциялар үшін шекаралық есептер теориясын жаңа деңгейде дамытуға бағытталған және Бесов кеңістіктеріндегі зерттеулерді одан әрі жалғастыруға ғылыми негіз болады. Алынған нәтижелер теориялық тұрғыдан да, қолданбалы есептерді шешуде де маңызды болып табылады.

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe. Göttingen, 1851 (Russian transl. Sochineniya, Moscow, 1948, 49–87).

2 D. Hilbert, Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem Funktionentheorie. Verhandl. der III Internat. Math. Kongr., Heidelberg, (1904), 233–240.

3 J. Plemelj, Ein Erg¨anzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatshefte f¨ur Mathematik und Physik. 19(1) (1908), 205–210.

4 Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 638 с.

5 N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, Moscow, 1946. (in Russian); English translation edited by J.R.M Radok: Dover Publication, Inc. New York, 1958.

6 A.P. Calderon and A. Zygmund, On singular integrals // Amer. J. Math. – 1956. – V. 78, No. 2. – P. 289 – 309.

7 H. Widom, Singular integral equations in Lp, Transactions of the American Mathematical Society, 97(1) (1960), 131–160.

8 I.B. Simonenko, The Riemann boundary value problem for n pairs of functions with measurable coefficients and its application to the study of singular integrals in Lp spaces with weights [in Russian],. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat.,28 (1964), 277–306.

9 A. P. Soldatov, A boundary Value Problem of Linear Conjugation in The Theory of Functions, Mathematics of the USSR - Izvestija, 14(1) (1980), 175–192.

10 R. Duduchava, B. Silbermann, Boundary value problems in domains with peaks, Mathematics of the USSR - Izvestija, 21 (2000), 1–122.

11 N. Bliev, Generalized Analytic Functions in Fractional Spaces, 1985.

(in Russian); English translation edited by H. Begehr and R. Radok: Addison Wesley Longman Inc, 1997.

12 N. Bliev, Singular integral operators with Cauchy kernel in fractional spaces, Siberiam Mathematical Journal, 2006, vol. 47, №1, pp. 37 – 45.

13 Л. Хёрмандер, Оценки для операторов инвариантных относительно сдвига. – Москва, ИЛ. – 1962. – С. 71.

14 N. Bliev, Multidimensional singular integrals and integral equations in fractional spaces I // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020.

15 О.В. Бесов, Об условиях существования классического решения волнового уравнения // Сиб. мат. журнал. – 1967. – Т. 73(115), №4. – С. 585 – 599.

16 O.V. Besov, V.P. Il’in and S.M. Nikol’ski˘i, Integral representations of function and embedding theorems, “Nauka”, Moscow, 1975. 480 p. English translation

edited by V. H. Winston and Sons, Washington, DC; Halsted Press, New York etc., 1978, 1979.

17 И.Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции. – М.: ФМГ. – 1959, 628с.

18 J. Jost, Partial differential equations (Vol. 214). Springer Science & Business Media, 2012.

19 S. Bergman, M. Schiffer, Kernel functions and conformal mapping. Compositio Mathematica., 8, 205–249, 1951.

20 M. Schiffer, The kernel function of an orthonormal system. Duke Math. J., 13(4):529-540, 1946.

21 С.М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

22 N. Bliev, Singular integral operators with Cauchy kernel in fractional spaces, Siberiam Mathematical Journal, 2006, vol. 47, №1, pp. 37 – 45.

23 G.S. Litvinchuk, Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Intergal Equations with Shift, Mathematics and Its Applications. – V. 23. – Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 2000, 378p.

24 N. Bliev, A system of singular integral equations with a Cauchy kernel in Besov spaces, Doklad Nac. Akademyy nauk RK. – 2007. №5. [russian]

25 N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Riemann problem for multiply connected domain in Besov spaces,” Boundary Value Problems, vol. 2024(1), 70, p. 9, 2024. https://doi.org/10.1186/s13661-024-01883-x. (Q1)

26 N. K. Bliev and N. M. Yerkinbayev, “Boundary conjugation problem for piecewise analytic functions in Besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 69(5), pp. 849–856, 2024.
https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2164887. (Q2)

27 N. K. Bliev, K. S. Tulenov, and N. M. Yerkinbayev, “Noetherian solvability and explicit solution of a singular integral equation with weighted carleman shift in besov spaces,” Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 68, pp. 1264–1285, 2023. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2045975. (Q2)

28 M. Schiffer, Fredholm eigen values of multiply-connected domains. Prepared under contract Nonr-225 (11) for Office of Naval Research. 1959

26 Akhalaia, G., Giorgadze, G., Manjavidze, N. Boundary-Value Problems with Shift and Beltrami Systems, Journal of Mathematical Sciences, 237 (2019), 1-29.

29 A. Alu and N. Engheta, Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings, Phys. Rev. E. 72, 016623. 2005 . (doi:10.1103/PhysRevE.72.016623)

30 S. Bergman, M. Schiffer, Kernel functions and conformal mapping. Compositio Mathematica., 8, 205–249, 1951.

31 G. Giorgadze, N. Manjavidze, On some constructive methods for the matrix Riemann–Hilbert boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences, 195(2013), 146-174.

32 G. Giorgadze, G. Khimshiashvili, Riemann-Hilbert problems with coefficients in compact Lie groups. In Mechanics and Physics of Structured Media. Academic Press, 2022, 303-326.

33 P. Jarczyk, V. Mityushev, Neutral coated inclusions of finite conductivity. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 3468(2140):954–970, 2012.

34A.I. Markushevich, On a boundary value problem of analytic function theory, Uch. zapiski MGU, 1, n. 100, pp. 20–30. 1946

35 G.W. Milton, The theory of composites, Cambridge monographs on applied and computational mathematics, 2002.